

K2 79

LÊ QUANG MINH - NGUYỄN VĂN VƯỢNG

SỨC BỀN VẬT LIỆU

TẬP HAI



NHÀ XUẤT BẢN



**THƯ VIỆN QUỐC GIA VIỆT NAM
HUBT**

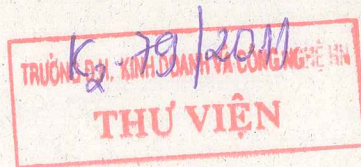
TÀI LIỆU PHỤC VỤ THAM KHẢO NỘI BỘ

LÊ QUANG MINH – NGUYỄN VĂN VƯỢNG

SỨC BỀN VẬT LIỆU

TẬP HAI

(Tái bản lần thứ hai)



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM



§14-1. KHÁI NIỆM

Trong việc truyền tải điện cần phải dùng dây dẫn điện treo trên các cột. Gần đây, trong các công trình lớn như cầu treo, cáp truyền qua thung lũng, dây vận tải ở các mỏ, kết cấu mái của những nhà lớn như cung thể thao, bể bơi v.v.. đều sử dụng dây. Vì vậy, chúng ta đề cập đến việc tính toán độ bền của dây.

Đặc điểm của dây là không chịu được mômen uốn và mômen xoắn, do đó ta gọi là dây mềm. Dây tuyệt đối mềm là dây hoàn toàn không chịu được xoắn và uốn. Nếu dây có một ít khả năng nào chống xoắn và uốn thì ta gọi là dây cứng. Tất nhiên có thể căn cứ vào khả năng chống uốn và xoắn để phân biệt loại dây nhưng là một kết cấu dây thì ta xem các khả năng này là không có. Mômen uốn và mômen xoắn trên mọi mặt cắt ngang của dây là bằng không.

Dây thường được treo vào hai móc cố định. Hai móc này còn được gọi là hai gối cố định. Chúng tạo nên các sức căng kéo dây. Ta có thể gặp các trường hợp sau đây :

1. Hai móc cố định đồng mức, nghĩa là hai móc cùng nằm trên mặt phẳng ngang (h.14-1a).
2. Hai móc cố định không đồng mức, khi chúng nằm trên các mặt phẳng ngang khác nhau (h.14-1b).

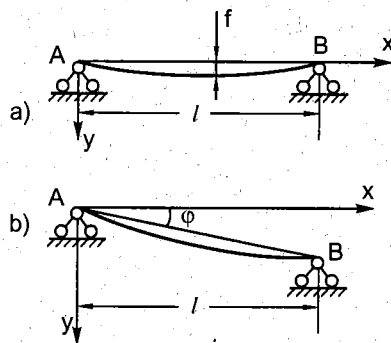
Ta chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ h.14-1.

Gốc tọa độ O trùng với A. Ox là giao tuyến của mặt phẳng thẳng đứng đi qua AB với mặt phẳng ngang đi qua A. Khoảng cách giữa hai đường thẳng đứng qua AB được gọi là khẩu độ và kí hiệu là l . Góc tạo bởi đường AB với trục Ox được kí hiệu là φ .

Trong bài toán có móc đồng mức, độ võng lớn nhất của dây thường được kí hiệu là f và được gọi là "mũi tên". Căn cứ vào tỉ lệ giữa f và l ta chia ra hai loại bài toán.

1. Bài toán có độ võng lớn, nghĩa là khi $\frac{f}{l} > \frac{1}{10} \div \frac{1}{20}$
2. Bài toán có độ võng bé, nghĩa là khi $\frac{f}{l} < \frac{1}{10} \div \frac{1}{20}$

Dây có độ võng nhỏ còn được gọi là dây thoải. Loại dây mềm và thoải được dùng nhiều nhất vì vậy sau đây ta chỉ đề cập đến loại này.



Hình 14-1

§14-2. NHỮNG CÔNG THỨC TỔNG QUÁT

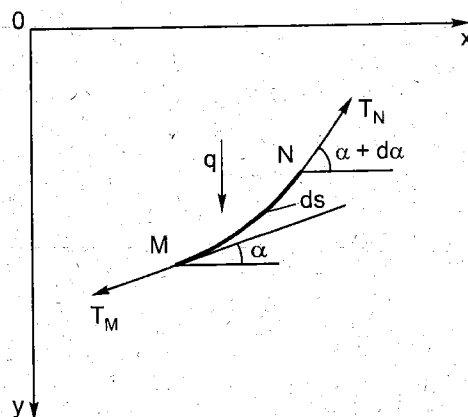
1. Tính chất của thành phần ngang của lực căng

Xét một đoạn dây vô cùng bé có chiều dài ds giới hạn bởi hai mặt cắt MN.

Gọi T_M và T_N là các sức căng trên các mặt cắt M và N. Ngoại lực ở đây là một lực phân bố q . Vì ds là vô cùng bé nên hình chiếu của ds lên trục Ox là dx cũng là vô cùng bé và ta xem như q phân bố đều trên dx , và quan hệ giữa ds và dx có thể viết :

$$dscos\alpha = dx$$

Vì trên các mặt cắt MN mômen uốn bằng 0 nên điều kiện cân bằng của đoạn dây ds chỉ còn hai phương trình hình chiếu.



Hình 14-2

$$\begin{cases} T_M \cos \alpha - T_N \cos(\alpha + d\alpha) = 0 & (1) \\ -T_M \sin \alpha + T_N \sin(\alpha + d\alpha) - qdx = 0 & (2) \end{cases}$$

Gọi H là thành phần hình chiếu của T theo phương ngang, ta có :

$$T_M \cos \alpha = H_M, \quad T_N \cos(\alpha + d\alpha) = H_N$$

$$\text{Hay} \quad T_M = \frac{H_M}{\cos \alpha} \quad T_N = \frac{H_N}{\cos(\alpha + d\alpha)} \quad (14-1)$$

Từ phương trình (1) ta có thể viết :

$$H_M = H_N = H$$

và phát biểu như sau :

Trong mọi trường hợp, thành phần ngang của lực căng trên những mặt cắt khác nhau của dây là bằng nhau.

2. Phương trình vi phân của đường cong

Tính T_M và T_N theo H và thay vào phương trình (2) ta được :

$$H[\operatorname{tg}(\alpha + d\alpha) - \operatorname{tg}\alpha] = q \cdot dx$$

nhưng

$$[\operatorname{tg}(\alpha + dx) - \operatorname{tg}\alpha] = d(\operatorname{tg}\alpha) = d(y')$$

Vậy ta có thể viết lại biểu thức trên như sau :

$$H \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = q \quad (14-2)$$

Phương trình vi phân đó là đúng với mọi trường hợp, q có thể là một hàm số bất kỳ nào đó theo x .

§14-3. BÀI TOÁN CÓ MÓC ĐỒNG MỨC (DÂY THOẢI)

Trước hết ta hãy xét trường hợp dây chịu tác dụng của lực bản thân. Gọi p là trọng lượng riêng của dây vậy trọng lượng của ds là pds . Trọng lượng đó phân bố đều trên dx nên ta có :

$$q = \frac{pds}{dx} = \frac{p}{\cos \alpha} \quad (14-3)$$

qua công thức (14-3) ta có những nhận xét quan trọng sau đây :

- $\cos \alpha$ là thay đổi dọc theo đường cong của dây. Như vậy q không phải lực phân bố đều.
- Trong trường hợp móc đồng mức, trị số lớn nhất của α là ở hai đầu mút của dây.

Tại đó ta có thể tính $\cos \alpha$ theo $\operatorname{tg} \alpha$ như sau :

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$$

Có thể xem $\operatorname{tg} \alpha = \frac{f}{l}$ và như vậy :

$$\cos \alpha \approx \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{l}\right)^2}}$$

Ví dụ với $\frac{f}{l} = \frac{1}{10}$ thì $\left(\frac{f}{l}\right)^2 = 0,01$ thay vào trên ta thấy $\cos \alpha \approx 1$. Trong trường hợp này ta có thể xem q như phân bố đều.

1. Phương trình đường cong của dây

Phương trình vi phân của đường cong là :

$$H \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = q = C^{\text{te}}$$

Ở đây q là một hằng số được chọn dấu tùy ý sao cho phù hợp với hệ trục tọa độ đã chọn và quy ước dấu của tải trọng.

Tích phân phương trình đó hai lần ta được :

$$H \cdot y' = qx + C_1$$

$$H \cdot y = \frac{qx^2}{2} + C_1 x + C_2$$

Như vậy dạng đường cong là hình parabol. Các hằng số tích phân được xác định từ các điều kiện biên như sau :

$$\text{Khi } x = 0 \text{ thì } y = 0$$

$$\text{Khi } x = \frac{l}{2} \text{ thì } y' = 0$$

(vì tính chất đối xứng cực đại của Parabol phải ở giữa).

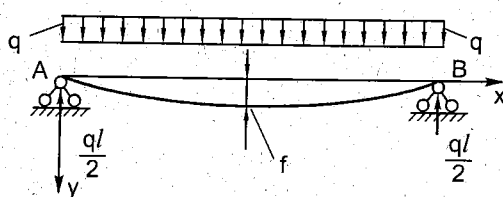
Thay vào trên ta tìm thấy :

$$C_2 = 0 \quad C_1 = -\frac{ql}{2}$$

Phương trình của đường cong sơ bộ có thể viết dưới dạng :

$$y = \frac{1}{H} \left(q \frac{x^2}{2} - \frac{ql}{2} x \right)$$

Thay trị số $x = \frac{l}{2}$ vào ta tính được :



Hình 14-3

$$y_{\max} = f = -\frac{ql^2}{8.H}$$

Để f có trị số dương thì q phải là âm. Điều đó hoàn toàn phù hợp với quy ước dấu của q mà chúng ta đã chọn (q âm có chiều đi xuống). Vậy độ võng lớn nhất là :

$$f = y_{\max} = \frac{ql^2}{8.H} \quad (14-4)$$

Phương trình của đường cong sẽ là :

$$y = \frac{1}{H} \left(q \frac{l}{2} x - \frac{qx^2}{2} \right) \quad (14-5)$$

Công thức (14-4) có một ý nghĩa quan trọng : khi biết được f thì có thể tính được H và ngược lại. Bài toán đây là bài toán siêu tĩnh vì phải xác định được bốn thành phần phản lực ở các gối đỡ. Cũng vì vậy ta phải xác định được một thành phần phản lực từ điều kiện biến dạng của dầm. Các phép toán về sau cho phép ta xác định phương trình này nhưng ở đây biểu thức (14-4) cho ta thấy hoặc có thể chọn f làm ẩn số hay chọn H làm ẩn số đều được. Nhiều sách đã chọn f làm ẩn số nhưng ở đây chúng ta sẽ chọn H làm ẩn số.

2. Sức căng cực đại

Ta nói sức căng bé nhất là sức căng trên mặt cắt ở giữa khẩu độ. Thực vậy vì tại đó $T = H$. Ở một mặt cắt bất kì ta luôn có :

$$\vec{T} = \vec{H} + \vec{T} \sin \alpha \quad (14-6)$$

Ở mặt cắt ở giữa nhịp $\alpha = 0$ nên $T \sin \alpha = 0$.

Sức căng lớn nhất khi $\sin \alpha$ có trị số lớn nhất. Các vị trí đó là ở hai móc. Nghĩa là khi $x = 0$ và $x = l$.

Ta có thể sử dụng các phương trình mômen đối với các điểm A và B để tìm thấy các thành phần thẳng đứng của sức căng tại A và B (không dùng phương trình hình chiếu vì T chưa được xác định).

$$\sum M_B = Y_A l - q \frac{l^2}{2} = 0$$

$$\sum M_A = Y_B l - q \frac{l^2}{2} = 0$$

$$\text{có: } Y_A = Y_B = \frac{ql}{2}$$

ừ đó ta có $T_{\max}$ là:

$$T_{\max} = \sqrt{H^2 + \left(\frac{ql}{2}\right)^2}$$

Hay

$$T_{\max} = H \sqrt{1 + \frac{16f^2}{l^2}} \quad (14-7)$$

Điều kiện bền của dây là:

$$\frac{T_{\max}}{F} \leq [\sigma] \quad (14-8)$$

F là diện tích mặt cắt ngang của dây.

Muốn thực hiện được phép tính kiểm tra này thì ta phải xác định được H .

3. Dầm tĩnh định tương ứng

Nhằm rút gọn cách tính toán và suy luận chúng ta hình dung một dầm tĩnh định được đặt trên hai gối tựa cố định có chiều dài bằng khẩu độ l và chịu lực phân bố đều giống như dây (h.14-4b).

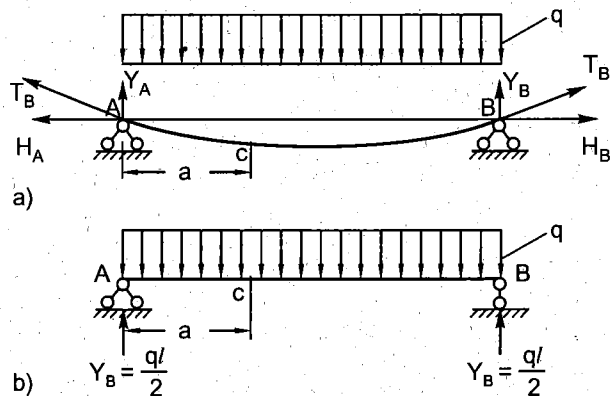
Trên hình (14-4a) biểu diễn hình dây treo trên hai móc đồng mức A-B với các sức căng T_A, T_B và các thành phần H_A, H_B cùng với các thành phần thẳng đứng Y_A, Y_B .

Ta nhận thấy dầm tĩnh định tương ứng chỉ có các phản lực Y_A và Y_B . Các thành phần phản lực này của dây và dầm là bằng nhau. Trên dầm không có các thành phần phản lực H_A và H_B .

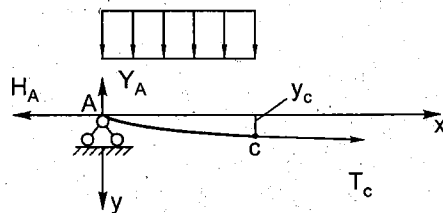
Bây giờ ta hãy tính sức căng trên một mặt cắt C nào đó có hoành độ $x = a$ của dây.

Viết phương trình tổng mômen đối với C của tất cả các lực đặt trên đoạn dây AC. Ta có:

$$Y_A \cdot x - \frac{qx^2}{2} - H_A \cdot y_C = 0 \quad (a)$$



Hình 14-4



Hình 14-5

Tổng mômen đó phải bằng 0 vì dây không chịu được uốn.

Ta tính mômen uốn trên dầm tương ứng. Ta có :

$$M_x = Y_A \cdot x - \frac{qx^2}{2} \quad (b)$$

Đem (b) thay vào (a) ta có :

$$y_C \cdot H_A = M(x)$$

Ta có thể viết một cách tổng quát cho bất cứ mặt cắt nào

$$y(x) = \frac{M(x)}{H} \quad (14-9)$$

Ta có kết luận :

Độ võng của dây là bằng mômen uốn trên dầm tương ứng chia cho H.

Xét trường hợp trên dây có thêm một lực tập trung.

Giả sử ngoài trọng lượng bản thân q trên dây có thêm một lực tập trung đặt tại mặt cắt C có hoành độ $x = a$. Như vậy trên dầm tương ứng ta cũng có lực P tương tự.

Dùng các phương trình mômen đối với các điểm A và B ta sẽ tìm thấy (ở đây không dùng phương trình hình chiếu vì T là ẩn).

$$Y_A = \frac{ql}{2} + \frac{P(l-a)}{l}$$

$$Y_B = \frac{ql}{2} + \frac{Pa}{l}$$

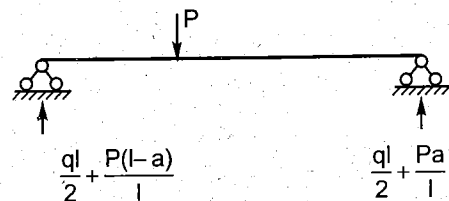
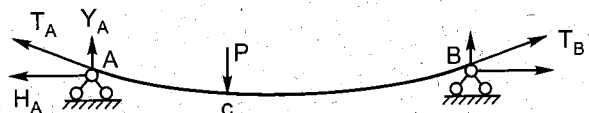
Các trị số đó đúng bằng các phản lực thẳng đứng ở dầm tương ứng.

Như vậy nếu tính cho một mặt cắt bất kì trên dây ta cũng có phương trình :

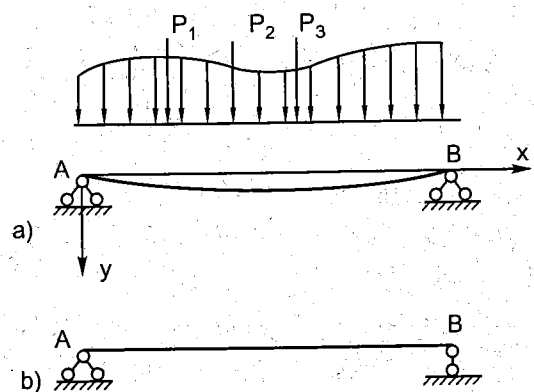
$$y(x) = \frac{M(x)}{H}$$

Điều đặc biệt mà chúng ta cần chú ý là biểu thức đó không phụ thuộc vào hình dáng ban đầu của dây. Sau khi dây chịu tải trọng P , hình dáng của dây có thể khác với hình dáng ban đầu nhưng quan hệ trên là không thay đổi. Như vậy, có nghĩa là, nếu biết H và $M(x)$ thì biểu thức (14-9) lại chính là phương trình đường cong của dây.

Vừa rồi chúng ta lấy một lực P làm ví dụ. Nếu như ta thêm một hệ lực tập trung hay một hệ lực phân bố thì tính chất đó không thay đổi. Nghĩa là ta có thể áp dụng biểu thức (14-9) cho một hệ lực bất kì (hình 14-7).



Hình 14-6



Hình 14-7

Trên hình vẽ 14-7 ta phải xem hệ lực đặt trên dây như hệ lực đặt trên dầm tương ứng.

Tính mômen uốn của dầm tương ứng đem chia cho H thì có phương trình đường cong của dây.

4. Chiều dài của dây

Để tính được H ta phải đề cập đến độ dẫn của dây, do đó ta phải tính được độ dài của dây. Chiều dài của dây được tính với công thức.

$$L = \int_1 ds \quad (a)$$

trong đó ds là một vi phân cung của dây, vậy :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \quad (b)$$

Đem thay (b) vào (a) ta có :

$$L = \int_1 \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

Biểu thức $\frac{dy}{dx}$ là đạo hàm của đường cong $y(x)$. Ta xét với trường hợp dây thoải, góc của các đường tiếp tuyến với trục hoành là nhỏ nên ta có :

$$y' = \operatorname{tg} \alpha$$

là một lượng nhỏ.

Vậy ta có :

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + (y')^2} dx \approx \int_0^1 \left[1 + \frac{1}{2} (y')^2 \right] dx \quad (14-10)$$

Từ biểu thức (14-9), ta có thể viết :

$$y = \frac{M(x)}{H}$$

Vậy :

$$y' = \frac{1}{H} \cdot \frac{d(M)}{dx} = \frac{1}{H} Q(x) \quad (14-11)$$

$Q(x)$ là lực cắt trên dầm tĩnh định tương ứng.

Thay trị số y' được tính từ (14-11) vào (14-10) ta có :

$$L = l + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{Q^2(x)}{H^2} dx$$

$$L = l + \frac{D}{2H^2} \quad (14-12)$$

Trong đó :

$$D = \int_0^1 Q^2(x) dx \quad (14-13)$$

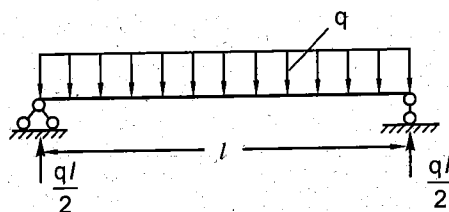
Tính D trong một số trường hợp thường gặp :

a) Khi lực phân bố đều

$$Q(x) = \frac{ql}{2} - qx$$

$$D = \int_0^l \left(\frac{ql}{2} - qx \right)^2 dx$$

$$D = \frac{q^2 l^3}{12} \quad (14-14)$$



Hình 14-8

b) Khi chỉ có một lực tập trung

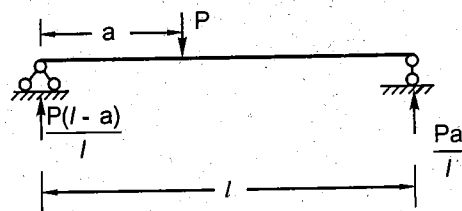
Ta có hai hàm :

$$Q(x)_1 = \frac{P(l-a)}{l}$$

$$Q(x)_2 = \frac{Pa}{l}$$

$$D = \int_0^a \left[\frac{P(l-a)}{l} \right]^2 dx + \int_a^l \left(\frac{Pa}{l} \right)^2 dx$$

$$D = \frac{P^2(l-a)a}{l} \quad (14-15)$$

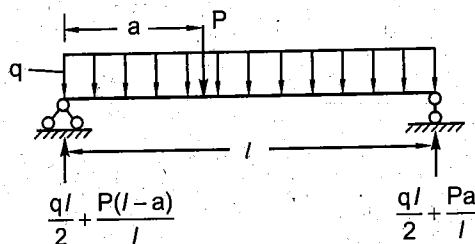


Hình 14-9

c) Vừa có lực phân bố vừa có lực tập trung

$$Q(x)_1 = \left(\frac{ql}{2} - qx \right) + \frac{P(l-a)}{l}$$

$$Q(x)_2 = \left(\frac{ql}{2} - qx \right) - \frac{Pa}{l}$$



Hình 14-10

Khéo léo sử dụng các kết quả (14-14) và (14-15) chúng ta chỉ còn phải tính cho hai tích phân :

$$\int_0^a 2 \left(\frac{ql}{2} - qx \right) \frac{P(l-a)}{l} dx = Pq \frac{a(l-a)^2}{l}$$

$$\text{và} - \int_a^l 2 \left(\frac{ql}{2} - qx \right) \frac{Pa}{l} dx = Pq \frac{a^2(l-a)}{l}$$

Cuối cùng ta được :

$$D = \frac{q^2 l^3}{12} + \frac{P^2 a(l-a)}{l} + q.P.a(l-a) \quad (14-16)$$

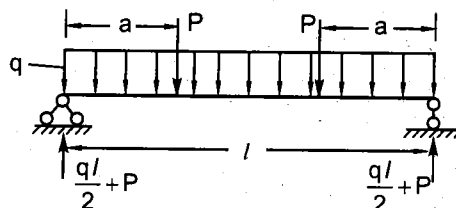
Tương tự như vậy ta có thể tính cho các trường hợp khác như sau :

Khi lực P đặt ở giữa nhịp :

$$D = \frac{q^2 l^3}{12} + \frac{P^2 l}{4} + q.P \frac{l^2}{4} \quad (14-17)$$

Khi trên dầm có hai lực đặt đối xứng (h.14-11)

$$D = \frac{q^2 l^3}{12} + 2.P^2.a + 2q.P.l/a \quad (14-18)$$



Hình 14-11

5. Tính lực căng của dây

Ta giả sử ở trạng thái đầu, dây có chiều dài là L_0 và lực căng là H_0 . Sang trạng thái thứ hai dây có chiều dài là L_1 và lực căng H_1 . Giả sử đã biết L_0 và H_0 , yêu cầu phải xác định L_1 và H_1 .

Từ công thức (14-12) ta có :

$$\Delta l = L_1 - L_0 = \left(l + \frac{D_1}{2H_1^2} \right) - \left(l + \frac{D_0}{2H_0^2} \right)$$

Vậy:

$$\Delta L = \frac{D_1}{2H_1^2} - \frac{D_0}{2H_0^2} \quad (14-19)$$

Như vậy nếu ta có Δl thì sẽ tính được H_1 .

Chỉ có hai nguyên nhân gây nên Δl

- Do sức căng
- Do nhiệt độ

Ta lần lượt tính các độ dẫn do những nguyên nhân đó gây nên.

a) Độ dẫn do sức căng gây nên

Ta giả sử ứng suất trong dây chưa vượt quá giới hạn đàn hồi. Xét một phân tố vô cùng bé ds_0 của dây ở trạng thái ban đầu. Độ dẫn sẽ là :

$$\Delta(ds_0)_T = \frac{T_1 - T_0}{EF} ds_0 \quad (14-20)$$

Trong đó E là môđun đàn hồi của vật liệu và F là diện tích mặt cắt ngang. Như ta đã có từ (14-1) :

$$T_1 = \frac{H_1}{\cos \alpha_1}, \quad T = \frac{H_0}{\cos \alpha_0}$$

Hình chiếu của ds_0 và ds_1 lên trục x xem là dx . Vậy :

$$ds_0 = \frac{dx}{\cos \alpha_0} \quad \text{và} \quad ds_1 = \frac{dx}{\cos \alpha_1}$$

Dem thay các trị số đó vào (14-20) ta có :

$$\Delta(ds_0)_T = \left(\frac{H_1}{\cos^2 \alpha_1} - \frac{H_0}{\cos^2 \alpha_0} \right) \frac{dx}{EF} \quad (14-21)$$

Tính $\cos\alpha$ theo $\tan\alpha$ với chú ý $\tan\alpha = y'$, biểu thức (14-21) được viết lại như sau :

$$\Delta(ds_o)_T = [H_1(1 + y_1'^2) - H_o(1 + y_o'^2)] \frac{dx}{EF}$$

Nhưng như chúng ta đã có :

$$y' = \frac{Q(x)}{H}$$

Vậy :

$$\Delta(ds_o)_T = \left[H_1 \left(1 + \frac{Q^2(x)_1}{H_1^2} \right) - H_o \left(1 + \frac{Q^2(x)_o}{H_o^2} \right) \right] \frac{dx}{EF}$$

Độ dẫn do T gây nên trên toàn dây là :

$$\Delta L_T = \int_1 \Delta(ds_o)_T$$

Thực hiện phép tích phân ta có được :

$$\Delta L_T = \frac{H_1}{EF} \left(l + \frac{D_1}{H_1^2} \right) - \frac{H_o}{EF} \left(l + \frac{D_o}{H_o^2} \right) \quad (14-22)$$

Trong đó

$$D_1 = \int_0^l Q^2(x)_1 dx \quad D_o = \int_0^l Q^2(x)_o dx$$

b) Độ dẫn do nhiệt độ gây nên

Gọi $\bar{\alpha}$ là hệ số dẫn dài do nhiệt độ, t_o là nhiệt độ ở trạng thái đầu và t_1 là nhiệt độ ở trạng thái 2. Ta có :

$$\Delta L_t = \bar{\alpha} (t_1 - t_o) L_o \quad (14-23)$$

Vì rằng : $\Delta L = \Delta L_T + \Delta L_t$

Đem (14-22), (14-23) và (14-19) thay vào ta có phương trình :

$$\frac{D_1}{2H_1^2} - \frac{D_o}{2H_o^2} = \frac{H_1}{EF} \left(l + \frac{D_1}{H_1^2} \right) - \frac{H_o}{EF} \left(l + \frac{D_o}{H_o^2} \right) + \bar{\alpha} (t_1 - t_o) L_o$$

Đó là phương trình biến dạng ta cần tìm. Trong đó H_1 là ẩn số.

Thực hiện các phép toán chuyển đổi cuối cùng ta có thể viết lại dưới dạng :

$$H_1^3 + \left[-H_o + \frac{\bar{\alpha} (t_1 - t_o) L_o EF}{l} + \frac{D_o EF}{2H_o^2 l} \right] H_1^2 + \frac{D_1 H_1}{l} - \frac{D_o H_1^2}{l H_o} - \frac{E.F.D_1}{2l} = 0$$

Chú ý các đại lượng : $\frac{L_o}{l} \approx 1$,

và $\frac{D_1 H_1}{l} - \frac{D_o H_1^2}{l H_o}$ có thể xem là 0 được.

Như vậy phương trình được viết lại như sau :

$$H_1^3 + \left[\frac{D_0 E F}{2H_0^2 l} - H_0 + \bar{\alpha}(t_1 - t_0) E F \right] H_1^2 - \frac{E F D_1}{2l} = 0 \quad (14-24)$$

Ví dụ 1. Một kết cấu dây cáp có khẩu độ $l = 100\text{m}$, ban đầu chịu tải trọng phân bố đều do trọng lượng bản thân gây nên với $q_0 = 0,10 \text{ kN/m}$ và có độ võng lớn nhất $f_0 = 1\text{m}$. Hai gối đỡ nằm trên cùng mặt phẳng ngang. Sau đó dây chịu thêm một tải trọng phân bố đều $q_1 = 0,4 \text{ kN/m}$ (do mặt sàn gây nên) và một lực tập trung $P = 10\text{kN}$ ở giữa nhịp (h.14-12).

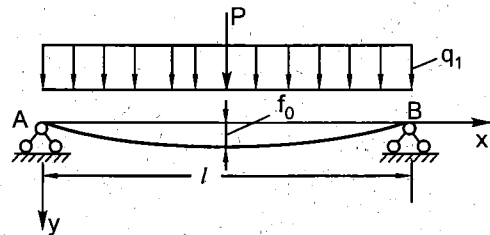
1. Tìm sức căng và độ võng của dây ở giữa nhịp dưới sự tác động của những tải trọng thêm gây nên.

2. Giả sử nhiệt độ tăng thêm $+30^\circ\text{C}$ hay giảm đi -30°C hỏi sức căng và độ võng thay đổi ra sao ?

Cho biết $E = 1.10^8 \text{ kN/m}$

$F = 4.10^{-3} \text{ m}^2$

$\bar{\alpha} = 125.10^{-7}$.



Hình 14-12

Bài giải

Đây là bài toán cầu cáp dây treo song song, q_0 là trọng lượng riêng của dây cáp, q_1 là trọng lượng của cầu đặt lên dây cáp trên mỗi mét dài. P là trọng lượng của hoạt tải phân cho dây cáp.

1. Tính H_0

Sử dụng công thức (14-4) để xác định thành phần ngang của lực căng. Ta có :

$$H_0 = \frac{q_0 l^2}{8f_0} = \frac{0,1 \cdot 100^2}{8 \cdot 1} = 125 \text{ kN}$$

2. Tính H_1

Sử dụng công thức (14-24) để tính H . Trước tiên ta phải tính D_0 và D_1 .

$$D_0 = \int_0^l [Q(x)_0]^2 dx = \frac{q_0^2 l^3}{12} = \frac{(0,1)^2 \cdot 100}{12} = 833 \text{ (kN)}^2 \text{ m}$$

$$\begin{aligned} D_1 &= \int_0^l [Q(x)_1]^2 dx = \frac{(q_0 + q_1)^2 l^3}{12} + \frac{P^2 l}{4} + \frac{(q_0 + q_1) l^2 \cdot P}{4} \\ &= \frac{(0,5)^2 \cdot 100^3}{12} + \frac{10^2 \cdot 100}{4} + \frac{0,5 \cdot 100^2 \cdot 10}{4} = 35,825 \text{ (kN)}^2 \text{ m} \end{aligned}$$

Độ cứng khi kéo của dây là :

$$E F = 1.10^8 \cdot 4.10^{-3} = 4.10^5 \text{ kN}$$

Thay vào phương trình (14–24) với $t_1 = t_0$ ta có :

$$H_1^3 + \left[\frac{4.10^5.833}{2.100.(125)^2} - 125 \right] H_1^2 - \frac{4.10^5.35825}{2.100} = 0$$

Hay :

$$H_1^3 - 18,4.H_1^2 - 7165.10^4 = 0$$

Giải phương trình trên theo phương pháp lập.

Đem chia hai vế cho H_1^2 rồi chuyển hai số hạng âm sang phải. Ta có :

$$H_1 = 18,4 + \frac{7165.10^4}{H_1^2} \quad (g)$$

Ta thử lấy $H_1 = 420$ kN. Đem thay vào vế phải của (g), tính được :

$$H_1 = 18,4 + \frac{7165.10^4}{(420)^2} = 425,5 \text{ kN}$$

Như vậy trị số ban đầu $H_1 = 420$ kN là hơi nhỏ. Lấy $H_1 = 422$ kN.

Sau khi thay vào vế phải của (g) ta có :

$$H_1 = 18,4 + \frac{7165.10^4}{(422)^2} = 420,8 \text{ kN} < 422 \text{ kN}$$

Vậy trị số $H_1 = 422$ kN là hơi lớn. Ta lấy $H_1 = 421,5$ kN

Thay vào tính được :

$$H_1 = 18,4 + \frac{7165.10^4}{(421,5)^2} = 421,7 \text{ kN} \approx 421,5 \text{ kN}$$

Vậy ta có thể lấy $H_1 = 421,6$ kN.

– Tính độ võng ở giữa khẩu độ

Ta có :

$$y = \frac{M}{H_1}$$

với

$$M\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{(q_0 + q_1)l^2}{8} + \frac{Pl}{4} = \frac{0,5 \times 100^2}{8} + \frac{10 \times 100}{4} = 875 \text{ kNm}$$

Vậy :

$$y\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{875}{421,6} = 2,07 \text{ m}$$

Như vậy tỉ số giữa $\frac{H_1}{H_0} = \frac{421,6}{125} = 3,37$ lần. So sánh giữa tải trọng ban đầu và tải trọng

cuối ta thấy tỉ lệ hơn 4 lần. Như vậy đi đến kết luận :

Sức căng của dây tăng chậm hơn tải trọng

3. Xác định H_1 khi có kể đến nhiệt độ

a) Giả sử nhiệt độ tăng lên 30° . Khi đó :

$$H_1^2 + \left[\frac{4 \cdot 10^5 \cdot 833}{2 \cdot 100 \cdot (125)^2} - 125 + 125 \cdot 10^{-7} \cdot 30 \cdot 4 \cdot 10^5 \right] H_1^2 - \frac{4 \cdot 10^5 \cdot 35825}{2 \cdot 100} = 0$$

Hay

$$H_1^3 + 131,6 H_1^2 - 7165 \cdot 10^4 = 0$$

Giải ra ta được : $H_1 = 375,5 \text{ kN}$

$$f_{\max} = y\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{875}{375,5} = 2,41 \text{ m}$$

Ta thấy khi nhiệt tăng lên, sức căng giảm xuống, độ võng tăng lên dây chùng xuống. Khi nhiệt độ giảm, phương trình có dạng :

$$H_1^3 - 168,4 H_1^2 - 7165 \cdot 10^4 = 0$$

Giải ra ta được : $H_1 = 479,7 \text{ kN}$

$$f_{\max} = \frac{M}{H_1} = \frac{875}{479,7} = 1,82 \text{ m}$$

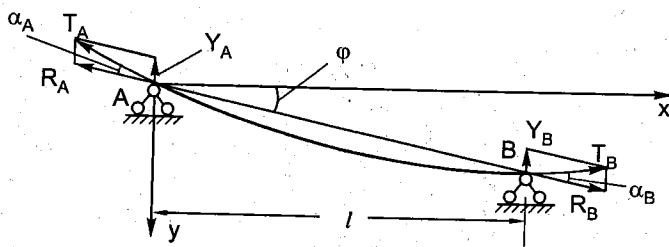
Ta thấy khi nhiệt độ giảm, sức căng tăng lên, độ võng giảm đi và dây bị căng thêm.

§14-4. DÂY CÓ MÓC KHÔNG CÙNG ĐỘ CAO

Xét dây treo trên hai móc A, B không đồng mức như hình vẽ. Ở đây cũng chỉ xét với dây thoải. Nếu vạch một đường thẳng qua AB thì độ cong của dây so với đường thẳng là không lớn. Gọi α là góc giữa đường tiếp tuyến với đường cong của dây và đường AB thì góc này nhỏ và $\cos \alpha \approx 1$.

Gọi khẩu độ là khoảng cách l giữa hai đường thẳng đứng đi qua A và B.

Ta hãy để ý đến phản lực tại các móc hay các gối tựa cố định. Các phản lực đó tạo nên các sức căng ở A và B. Kí hiệu chúng là T_A, T_B . Phương của chúng là các đường tiếp tuyến với đường cong tại A và B. Các đường tiếp tuyến này tạo với đường AB các góc α_A và α_B .



Hình 14-13

Ta có thể phân T_A và T_B thành hai thành phần. Thành phần thẳng đứng được kí hiệu là Y_A , Y_B và thành phần nằm trên đường AB được kí hiệu là R_A và R_B .

Ta cũng có thể phân T_A và T_B theo một cách khác : dùng các hình chiếu của T_A và T_B trên các trục tọa độ như hình vẽ. Các thành phần hình chiếu lên trục Oy được kí hiệu là V_A và V_B và các thành phần hình chiếu lên trục Ox được kí hiệu là H_A và H_B . Gọi φ là góc giữa đường AB và trục x thì ta có các tương quan giữa các thành phần hình chiếu của T_A và T_B như sau :

$$\begin{aligned} V_A &= Y_A + R_A \sin \varphi \\ V_B &= Y_B - R_B \sin \varphi \\ H_A &= R_A \cos \varphi \\ H_B &= R_B \cos \varphi \end{aligned} \quad (14-25)$$

Để xác định các thành phần Y_A và Y_B chỉ cần viết phương trình cân bằng tổng mômen của các ngoại lực tác động lên dây đối với A và B (không dùng phương trình hình chiếu vì T_A và T_B chưa xác định).

Xét sự phân bố của tải trọng do trọng lượng bản thân của dây gây nên. Lấy một phần tử vô cùng bé ds của dây. Gọi p là trọng lượng riêng trên một đơn vị chiều dài của dây, vậy trọng lượng của ds là pds . Chiều ds lên phương AB. Ta có :

$$d\xi = ds \cos \alpha$$

vậy trọng lượng phân bố trên $d\xi$ sẽ là :

$$q' = \frac{pds}{d\xi} = \frac{p}{\cos \alpha}$$

Chiếu tiếp $d\xi$ lên trục Ox, ta có :

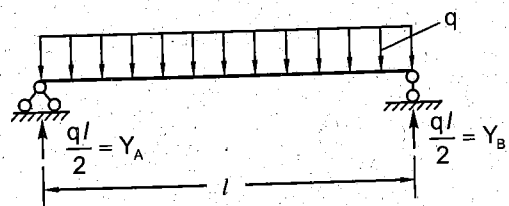
$$dx = d\xi \cdot \cos \varphi$$

Vậy lực phân bố trên dx là :

$$q = \frac{q' d\xi}{dx} = \frac{p}{\cos \varphi \cos \alpha} = \frac{q'}{\cos \varphi} \quad (14-26)$$

$\cos \varphi$ là hằng số vậy nếu $\cos \alpha \approx 1$ thì có thể xem tải trọng bản thân của dây là phân bố đều theo chiều ngang của dây.

Ta cũng sử dụng một dầm tương ứng tĩnh đặt trên hai gối tựa có khẩu độ bằng l . Vậy mọi tải trọng đặt trên dây đều có thể quy về tải trọng ngang đặt lên dầm. Với tải trọng phân bố đều q , dầm cũng chịu tải trọng tương tự :



Hình 14-14

Nhận thấy ngay các thành phần phản lực thẳng đứng của dầm vừa đúng bằng Y_A và Y_B .

Hãy xét đến các thành phần phản lực R_A và R_B .

Dùng phương trình hình chiếu theo phương Ox ta thu được :

$$R_B \cos \varphi - R_A \cos \varphi = 0$$

Vì $\cos \varphi$ là hằng vậy $R_B = R_A = R$. Hay có thể viết

$$H_B = R \cos \varphi = H_A = R \cos \varphi$$

Ta đi đến kết luận tương tự như trường hợp dây đặt trên hai móc đồng mức :

Thành phần sức căng ngang của dây ở mọi nơi là bằng nhau.

Các công thức (14-24) có thể viết lại như sau :

$$V_A = Y_A + H \tan \varphi$$

$$V_B = Y_B - H \tan \varphi$$

(14-27)

1. Phương trình đường cong của dây dưới tác dụng của trọng lượng bản thân

Lấy một điểm C bất kì trên dây. Gọi chiều dài đường thẳng góc hạ từ C xuống AB là y_1 . Tưởng tượng vớt bỏ phần bên phải và xét riêng phần bên trái (h.14-15).

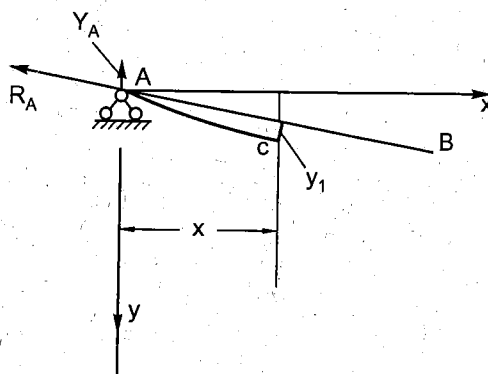
Sức căng T_A được thay bằng các thành phần Y_A và R_A .

Lấy tổng mômen đối với C và chú ý rằng mômen đó phải bằng 0. Ta có :

$$R_A \cdot y_1 - Y_A x + q \frac{x^2}{2} = 0$$

Nếu từ C hạ đường vuông góc xuống trục x , đường đó cắt AB tại một điểm. Gọi khoảng cách từ điểm đó đến C là y_2 . Ta có tương quan giữa y_2 và y_1 như sau :

$$y_2 = \frac{y_1}{\cos \varphi}$$



Hình 14-15

Thay trị số $y_1 = y_2 \cos \varphi$ và $R_A = H \cdot \frac{1}{\cos \varphi}$ vào phương trình trên ta có :

$$H \cdot y_2 = Y_A \cdot x - \frac{qx^2}{2}$$

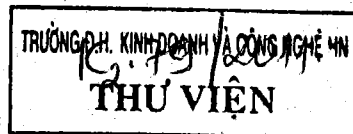
Vế thứ hai chính là mômen uốn trên dầm tương ứng.

$$M(x) = Y_A \cdot x - \frac{qx^2}{2} = \frac{qx(l-x)}{2}$$

Vậy ta có thể viết :

$$y_2 = \frac{M(x)}{H}$$

(14-28)



Phương trình đường cong của dây viết trong hệ trục tọa độ Oxy sẽ là :

$$y = y_2 + x \operatorname{tg} \varphi = \frac{M(x)}{H} + x \operatorname{tg} \varphi$$

Hay

$$y = \frac{qx(l-x)}{2H} + x \operatorname{tg} \varphi \quad (14-29)$$

Đó là một parabol bậc 2. Hệ số góc của tiếp tuyến với đường cong dây là :

$$y' = \operatorname{tg} \alpha = \frac{q}{2H} (l-2x) + \operatorname{tg} \varphi$$

lấy $x = \frac{l}{2}$ ta được :

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \varphi$$

Đường tiếp tuyến tại đó song song với AB.

Đỉnh của parabol là tại vị trí có $y' = 0$ nghĩa là khi :

$$x_0 = \frac{l}{2} + \frac{H \operatorname{tg} \varphi}{q}$$

Tung độ tại điểm đó là :

$$y_0 = \frac{ql^2}{8H} + \frac{l \operatorname{tg} \varphi}{2} + \frac{H \operatorname{tg}^2 \varphi}{2q}$$

Điểm này có thể ngoài cả khẩu độ. Điểm chúng ta quan tâm hơn là điểm tại đó có y_2 lớn nhất. Như trên đã có :

$$y_2 = \frac{M}{H} = \frac{qx(l-x)}{2H}$$

$$y_{2\max} = f = y_2 \left(\frac{l}{2} \right) = \frac{ql^2}{8H} \quad (14-30)$$

Ta lại tìm thấy công thức đã xác định được trong trường hợp đồng mức, nhưng ở đây f_2 là khoảng cách từ AB đến mặt cắt đang xét theo phương thẳng đứng.

2. Khi có thêm một lực tập trung tại $x = a$

Sơ đồ của dầm tương đương chịu lực như trên hình vẽ. Ta chia dầm thành hai đoạn : từ A đến C và từ C đến B.

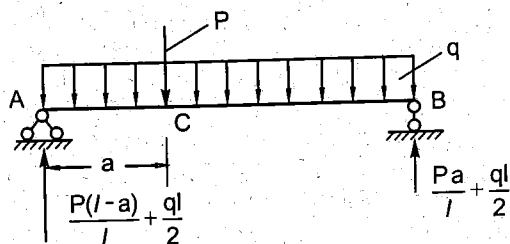
Biểu thức mômen trên đoạn AC là :

$$(0 < x \leq a)$$

$$M(x) = \frac{P(l-a)}{l} x + \frac{qx(l-x)}{2}$$

và ở đoạn 2 ($a \leq x \leq l$) là :

$$M(x) = \frac{Pa}{l} (l-x) + \frac{qx(l-x)}{2}$$



Hình 14-16

Vậy phương trình của đường cong trên đoạn AC :

$$y = y_2 + x \operatorname{tg} \varphi = \frac{qx(l-x)}{2H} + \frac{Px(l-a)}{Hl} + x \operatorname{tg} \varphi \quad (14-31)$$

Phương trình đường cong trên đoạn BC :

$$y = y_2 + x \operatorname{tg} \varphi = \frac{qx(l-x)}{2H} + \frac{Pa(l-x)}{Hl} + x \operatorname{tg} \varphi \quad (14-32)$$

Tại điểm đặt lực $x = a$. Tung độ sẽ là :

$$y_C = \frac{a(l-a)}{2H} \left(\frac{2P}{l} + q \right) + a \operatorname{tg} \varphi$$

Nếu C là ở giữa khẩu độ : $x = \frac{l}{2}$

$$y_C \left(\frac{l}{2} \right) = \frac{l^2}{8H} \left(\frac{2P}{l} + q \right) + \frac{l}{2} \operatorname{tg} \varphi$$

Độ võng lớn nhất tính từ đường AB đến dây :

$$f_{\max} = y_2 \left(\frac{l}{2} \right) = \frac{ql^2}{8H} + \frac{Pl}{4H} \quad (14-33)$$

3. Chiều dài của dây

Chiều dài của dây được xác định với biểu thức :

$$L = \int_0^l \sqrt{1 + y'^2} dx$$

Trong đó :

$$y = y_2 + x \operatorname{tg} \varphi = \frac{M(x)}{H} + x \operatorname{tg} \varphi$$

Vậy :

$$y' = \frac{1}{H} \cdot \frac{dM(x)}{dx} + \operatorname{tg} \varphi = \frac{Q(x)}{H} + \operatorname{tg} \varphi$$

Từ đó suy ra :

$$\frac{Q}{H} = y' - \operatorname{tg} \varphi \quad (14-34)$$

là hiệu độ dốc các tiếp tuyến của đường cong dây với độ dốc của đường thẳng AB nối với hai gối.

Trong trường hợp dây thoải, hai độ dốc này chênh nhau ít và lượng $\frac{Q}{H}$ là một lượng bé.

Tính biểu thức dưới căn :

$$\begin{aligned}
 1 + y^2 &= (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi) + \frac{Q^2}{H^2} + \frac{2 \operatorname{tg} \varphi \cdot Q}{H} = \frac{1}{\cos^2 \varphi} \left[1 + \frac{2 \sin \varphi \cdot \cos \varphi Q}{H} + \frac{Q^2}{H^2} \cdot \cos^2 \varphi \right] \\
 &= \frac{1}{\cos^2 \varphi} \left[\left(1 + \frac{Q \sin \varphi \cos \varphi}{H} \right)^2 + \frac{Q^2}{H^2} \cos^4 \varphi \right] \\
 &= \frac{1}{\cos^2 \varphi} \left(1 + \frac{Q \sin \varphi \cos \varphi}{H} \right)^2 \left[1 + \frac{Q^2 \cos^4 \varphi}{H^2 \left(1 + \frac{Q \sin \varphi \cos \varphi}{H} \right)^2} \right]
 \end{aligned}$$

Vì tỉ số $\frac{Q}{H}$ là bé nên bình phương lại càng bé và vì vậy căn của số hạng cuối cùng có thể tính như sau :

Theo Taylor ta có : $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2.4}x^2$

x ở đây là số hạng :

$$x = \frac{Q^2 \cos^4 \varphi}{H^2 \left(1 + \frac{Q \sin \varphi \cos \varphi}{H} \right)^2}$$

$$\begin{aligned}
 \sqrt{1+x} &= 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2 \cos^4 \varphi}{H^2 \left(1 + \frac{Q \sin \varphi \cos \varphi}{H} \right)^2} - \frac{1}{2.4} \cdot \frac{Q^4 \cos^8 \varphi}{H^4 \left(1 + \frac{Q \sin \varphi \cos \varphi}{H} \right)^4} \\
 &= 1 + \frac{1}{2} \frac{Q^2 \cos^4 \varphi}{H^2} \left[\frac{1}{\left(1 + \frac{Q \sin \varphi \cos \varphi}{H} \right)^2} - \frac{1}{4} \frac{Q^2 \cos^4 \varphi}{H^2 \left(1 + \frac{Q \sin \varphi \cos \varphi}{H} \right)^2} \right]
 \end{aligned}$$

Ta có thể xem

$$\left(1 + \frac{Q \sin \varphi \cos \varphi}{H} \right)^2 \approx 1$$

Từ đó ta có :

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2} \frac{Q^2 \cos^4 \varphi}{H^2} \left[1 - \frac{1}{4} \frac{Q^2 \cos^2 \varphi}{H^2} + \frac{Q^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi}{4H^2} \right]$$

Vậy :

$$\sqrt{1+y^2} = \frac{1}{\cos \varphi} \left(1 + \frac{Q \sin \varphi \cos \varphi}{H} \right) \left[1 + \frac{1}{2} \frac{Q^2 \cos^4 \varphi}{H^2} \left(1 - \frac{1}{4} \frac{Q^2 \cos^2 \varphi}{H^2} + \frac{1}{4} \frac{Q^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi}{H^2} \right) \right]$$

Ta dừng lại ở số hạng có $\frac{Q}{H}$ lũy thừa bậc ba, công thức sẽ là :

$$\sqrt{1+y'^2} = \frac{1}{\cos \varphi} + \frac{Q \sin \varphi}{H} + \frac{1}{2} \frac{Q^2 \cos^3 \varphi}{H^2} - \frac{1}{2} \frac{Q^3 \cos^4 \varphi \sin \varphi}{H^3}$$

Vậy độ dài L của dây sẽ là :

$$L = \frac{l}{\cos \varphi} + \frac{\sin \varphi}{H} \int_0^l Q dx + \frac{\cos^3 \varphi}{2H^2} \int_0^l Q^2 dx - \frac{\cos^4 \varphi \sin \varphi}{2H^3} \int_0^l Q^3 dx \quad (14-35)$$

Chú ý :

$$\int_0^l Q dx = M(l) \Big|_0^l = M(l) - M(0) = 0$$

Vì dầm tương ứng có các gối tựa hai đầu và tại đó mômen uốn bằng không.

Biểu thức tích phân với Q^2 và Q^3 được kí hiệu như sau :

$$D = \int_0^l Q^2(x) dx \quad D' = \int_0^l Q^3(x) dx$$

Nếu tải trọng là đối xứng qua điểm giữa nhịp của dầm tương ứng thì biểu đồ lực cắt là phản đối xứng và ta có $D' = 0$.

Biểu thức của L được viết lại như sau :

$$L = \frac{l}{\cos \varphi} + \frac{\cos^3 \varphi D}{2H^2} - \frac{\cos^4 \varphi \sin \varphi D'}{2H^3} \quad (14-36)$$

Trong trường hợp góc chênh gối đỡ φ bé hoặc tải trọng đối xứng qua điểm giữa của nhịp có thể bỏ qua số hạng cuối cùng của công thức.

Khi đó :

$$L = \frac{l}{\cos \varphi} + \frac{\cos^3 \varphi D}{2H^2} \quad (14-37)$$

4. Sức căng của dây

Giả sử dây đang ở trạng thái đầu với lực căng có thành phần ngang H_0 ở nhiệt độ t_0 , sau đó, tải trọng và nhiệt độ thay đổi và có lực căng với thành phần ngang H_1 và nhiệt độ là t_1 . Độ dài của dây ở hai trạng thái đó là :

$$L_0 = \frac{l}{\cos \varphi} + \frac{\cos^3 \varphi}{2H_0^2} D_0 - \frac{\cos^4 \varphi \sin \varphi}{2H_0^3} D'_0$$

$$L_1 = \frac{l}{\cos \varphi} + \frac{\cos^3 \varphi}{2H_1^2} D_1 - \frac{\cos^4 \varphi \sin \varphi}{2H_1^3} D'_1$$

Trong đó :

$$D_0 = \int_0^l Q_0^2 dx \quad D'_0 = \int_0^l Q_0^3 dx$$

$$D_1 = \int_0^l Q_1^2 dx \quad D'_1 = \int_0^l Q_1^3 dx$$

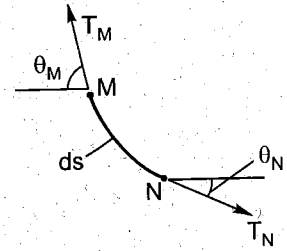
$Q(x)$ là lực cắt của dầm tương ứng ở trong hai trạng thái.

Ta xét một vi phân cung ds của dây. Độ dẫn của ds từ trạng thái đầu sang trạng thái thứ hai là :

$$\Delta(ds_o)_T = \frac{(T_1 - T_o)ds_o}{EF} \quad (14-38)$$

Trong đó $T_1 = \frac{H_1}{\cos \theta_1}$ và $T_o = \frac{H_o}{\cos \theta_o}$

$$ds_o = \frac{dx}{\cos \theta_o}$$



Hình 14-17

Góc θ ở đây để chỉ góc lập bởi tiếp tuyến của đường cong của dây với trục hoành. Ta thấy $\theta = \alpha \pm \varphi$. Ta có thể viết lại (14-38) như sau :

$$\Delta(ds_o)_T = \frac{1}{EF} \left(\frac{H_1 dx}{\cos \theta_1 \cos \theta_o} - \frac{H_o dx}{\cos^2 \theta_o} \right)$$

Một cách gần đúng có thể xem :

$$\frac{H_1 dx}{\cos \theta_1 \cos \theta_o} \approx \frac{H_1 dx}{\cos^2 \theta_1}$$

Vậy : $\Delta(ds_o)_T = \frac{1}{EF} [H_1(1 + \tan^2 \theta_1) - H_o(1 + \tan^2 \theta_o)] dx$

Hay

$$\Delta(ds_o)_T = \frac{1}{EF} [H_1(1 + y_1'^2) - H_o(1 + y_o'^2)] dx$$

Như ta đã có

$$y_o' = \frac{Q_o}{H_o} + \tan \varphi$$

$$y_1' = \frac{Q_1}{H_1} + \tan \varphi$$

Ta có thể viết lại $\Delta(ds_o)_T$ như sau :

$$\Delta(ds_o)_T = \frac{1}{EF} \left[H_1 \left(1 + \tan^2 \varphi + \frac{Q_1^2}{H_1^2} + 2 \tan \varphi \frac{Q_1}{H_1} \right) - H_o \left(1 + \tan^2 \varphi + \frac{Q_o^2}{H_o^2} + 2 \tan \varphi \frac{Q_o}{H_o} \right) \right] dx \quad (14-39)$$

Lấy tích phân từ 0 đến l của biểu thức đó ta sẽ có độ dẫn do sức căng gây nên. Ta có :

$$\Delta L_T = \frac{H_1}{EF} \left(\frac{l}{\cos^2 \varphi} + \frac{D_1}{H_1^2} \right) - \frac{H_o}{EF} \left(\frac{l}{\cos^2 \varphi} + \frac{D_o}{H_o^2} \right)$$

Chú ý :

$$\int_0^l Q_1 dx = M_1 \Big|_0^l = 0 \text{ và } \int_0^l Q_o dx = M_o \Big|_0^l = 0$$

Hay có thể viết lại dưới dạng :

$$\Delta L_T = \frac{(H_1 - H_o)l}{E.F.\cos^2 \varphi} + \frac{1}{EF} \left(\frac{D_1}{H_1} - \frac{D_o}{H_o} \right) \quad (14-40)$$

Nếu có sự thay đổi nhiệt độ, độ dãn do nhiệt độ gây nên sẽ là :

$$\Delta L_t = \bar{\alpha}(t_1 - t_o)L_o \quad (14-41)$$

Từ đó ta có :

$$\Delta L = L_1 - L_o = \Delta L_T + \Delta L_t$$

Các biểu thức được viết như sau :

$$\begin{aligned} \frac{\cos^3 \varphi}{2H_1^2} D_1 - \frac{\cos^4 \varphi \sin \varphi D_1'}{2H_1^3} - \left(\frac{\cos^3 \varphi}{2H_o^2} D_o - \frac{\cos^4 \varphi \sin \varphi D_o'}{2H_o^3} \right) = \\ = \frac{(H_1 - H_o)l}{\cos^2 \varphi.E.F} + \frac{1}{E.F} \left(\frac{D_1}{H_1} - \frac{D_o}{H_o} \right) + \bar{\alpha}(t_1 - t_o)L_o \end{aligned}$$

Ấn số ở đây là H_1 . Tính và sắp xếp lại theo thứ tự giảm dần theo lũy thừa ta có :

$$\begin{aligned} H_1^4 + \left[\frac{EF \cos^5 \varphi D_o}{2.l.H_o^2} - H_o + \bar{\alpha}(t_1 - t_o)EF \cdot \frac{L_o \cos^2 \varphi}{l} - \frac{D_o \cos^2 \varphi}{l.H} - \right. \\ \left. - \frac{\cos^6 \varphi \sin \varphi EFD_o'}{2.l.H_o^3} \right] H_1^3 + \frac{\cos^2 \varphi D_1}{l} H_1^2 - \frac{\cos^5 \varphi D_1 E.F}{2.l} H_1 + \frac{\cos^6 \varphi \sin \varphi D_1}{2.l} = 0 \quad (14-42) \end{aligned}$$

Trong trường hợp φ nhỏ, nghĩa là đường AB rất gần với trục hoành, hay tải trọng đối xứng qua điểm giữa của nhịp, ta có thể bỏ qua các số hạng chứa D_1', D_o' và nếu thay $\frac{L_o}{l} \approx \frac{1}{\cos \varphi}$ thì phương trình trở thành :

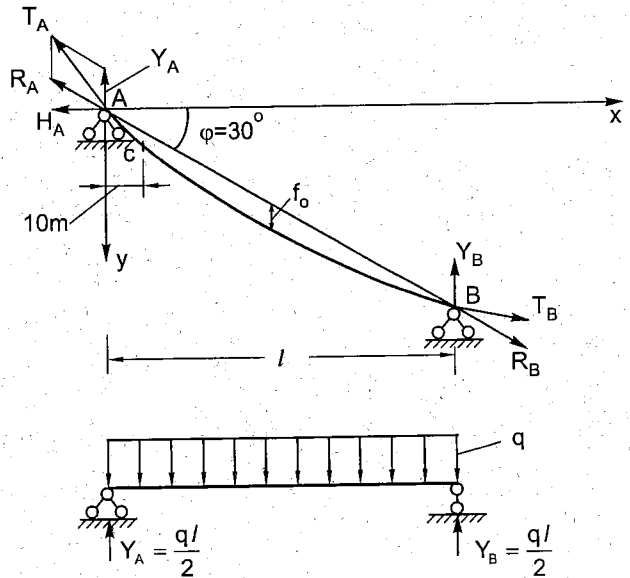
$$\begin{aligned} H_1^3 + \left[\frac{EF \cos^5 \varphi D_o}{2.l.H_o^2} - H_o + \bar{\alpha}(t_1 - t_o)EF \cos \varphi - \frac{D_o \cos^2 \varphi}{l.H_o} \right] H_1^2 + \\ + \frac{\cos^2 \varphi D_1}{l} H_1 - \frac{\cos^5 \varphi EFD_1}{2.l} = 0 \quad (14-43) \end{aligned}$$

Trong nhiều trường hợp, trong các bài toán tĩnh, hiệu

$\frac{\cos^2 \varphi D_1}{l} H_1 - \frac{\cos^5 \varphi D_o}{l.H_o} H_1^2$ có thể bỏ qua được vì quá nhỏ. Ta đi đến công thức :

$$H_1^3 + \left[\frac{EF \cos^5 \varphi D_o}{2.l.H_o^2} - H_o + \bar{\alpha}(t_1 - t_o)EF \cos \varphi \right] H_1^2 + \frac{\cos^5 \varphi EFD_1}{2.l} = 0 \quad (14-44)$$

Ví dụ 2. (h.14–18) Cho một dây treo có móc AB không đồng mức. Đường AB tạo với trục ngang Ox một góc chênh $\varphi = 30^\circ$. Khẩu độ $l = 100\text{m}$. Mũi tên theo phương thẳng đứng so với AB là $f_0 = 5\text{m}$. Trọng lượng bản thân phân bố theo dọc đường AB là $q' = 0,5 \text{ kN/m}$. Tính sức căng ngang H_0 và các phản lực của gối tựa.



Hình 14–18

Sau đó dây chịu thêm tải trọng tập trung $P = 10\text{kN}$ ở điểm C cách đường thẳng đứng qua gối tựa A là 10m . Nhiệt độ lại giảm đi 30°C .

Tính sức căng ngang H_1 , võng theo phương thẳng đứng tại C và các thành phần phản lực ở các móc. Cho biết diện tích mặt cắt ngang của dây $F = 4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$, mô đun đàn hồi $E = 1 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2$, hệ số giãn dài của nhiệt $\alpha = 12 \cdot 10^{-7}$.

Bài giải

Vì $\frac{f_0}{l} = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$ nên có thể dùng các công thức của dây mềm thoải.

1. Tải trọng phân bố đều trên dầm tĩnh định tương ứng là :

$$q = \frac{q'}{\cos 30^\circ} = \frac{0,5 \cdot 2}{\sqrt{3}} = 0,58 \text{ kN/m}$$

2. Tính H_0 . Sử dụng công thức (14–30). Ta có

$$H_0 = \frac{ql^2}{8f_0} = \frac{0,58 \cdot 100^2}{8 \times 5} = 145 \text{ kN}$$

3. Tính các thành phần phản lực thẳng đứng

Theo các công thức (14–27) ta có :

$$V_A = Y_A + H_0 \tan \varphi = \frac{ql}{2} + H_0 \tan 30^\circ = 112,3 \text{ kN}$$

$$V_B = Y_B - H_0 \tan \varphi = \frac{ql}{2} - H_0 \tan 30^\circ = -54,3 \text{ kN}.$$

Phản lực ở móc thấp có trị số âm nghĩa là móc có khuynh hướng bị nhô lên.

4. Tính H_1 . Sử dụng phương trình (14–44) ta có :

$$H_1^3 + \left[\frac{EF \cos^5 \varphi D_0}{2 \cdot l \cdot H_0^2} - H_0 + \alpha(t_1 - t_0)EF \cos \varphi \right] H_1^2 + \frac{\cos^5 \varphi EFD_1}{2 \cdot l} = 0$$

a) Tính D_0 và D_1 (theo (14-14) và (14-16))

$$D_0 = \frac{q^2 l^3}{12} = \frac{(0,58)^2 \cdot 100^3}{12} = 28033 \text{ (kN)}^2 \cdot \text{m}$$

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{q^2 l^3}{12} + \frac{P^2 \cdot a(l-a)}{l} + q \cdot Pa(l-a) \\ &= \frac{(0,58)^2 \cdot 100^3}{12} + \frac{(10)^2 \cdot 10 \cdot 90}{100} + 0,58 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 90 \\ &= 34153 \text{ (kN)}^2 \cdot \text{m} \end{aligned}$$

b) Viết và giải phương trình

$$H_1^3 + \left[\frac{4 \cdot 10^5 \cdot (\sqrt{3})^5 \cdot 28033}{2 \cdot 100 \cdot 2^5 \cdot 145^2} - 145 - 30 \cdot 125 \cdot 10^{-7} \cdot 4 \cdot 10^5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right] H_1^2 - \frac{(\sqrt{3})^5 \cdot 4 \cdot 10^5 \cdot 34153}{2^5 \cdot 100 \cdot 2} = 0$$

Sau khi thực hiện các phép toán ta có :

$$H_1^3 + 1024,1 H_1^2 - 33273,6 \cdot 10^3 = 0$$

Giải phương trình này theo phương pháp đúng dần đã thực hiện trong ví dụ 1. Cuối cùng ta có $H_1 = 167,1 \text{ kN}$.

Phản lực ở các gối tựa của dầm tương ứng :

$$Y_A = \frac{ql}{2} + P \frac{(l-a)}{l} = \frac{0,58 \cdot 100}{2} + 10 \cdot \frac{90}{100} = 38 \text{ kN}$$

$$Y_B = \frac{ql}{2} + P \cdot \frac{a}{l} = \frac{0,58 \cdot 100}{2} + 10 \cdot \frac{10}{100} = 30 \text{ kN}$$

Vậy thành phần phản lực thẳng đứng ở các móc là :

$$V_A = Y_A + H_1 \operatorname{tg} \varphi = 38 + 167,1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 134,5 \text{ kN}$$

$$V_B = Y_B - H_1 \operatorname{tg} \varphi = 30 - 167,1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = -66,48 \text{ kN}.$$

5. Tính độ võng tại C

Độ võng ở đây phải hiểu là khoảng cách theo phương thẳng đứng từ đường AB đến đường cong. Khoảng cách này ta vẫn kí hiệu là y_2 . Vậy theo (14-20) ta có :

$$y_2 = \frac{M(x)}{H}$$

$M(x)$ của dầm tương ứng tại điểm C. Ta có :

$$M(x) = Y_A \cdot a - q \cdot a \cdot \frac{a}{2} = 38 \cdot 10 - 0,58 \cdot \frac{10^2}{2} = 351 \text{ kNm}$$

Độ võng sẽ là :

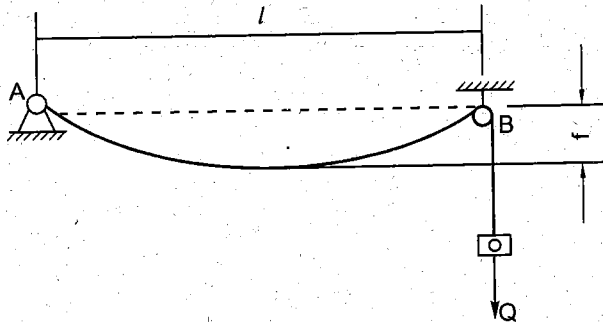
$$y_c = \frac{M}{H_1} = \frac{351}{167,1} = 2,10 \text{ m}.$$

Bài tập

- 14.1.** Một dây mềm nặng 1 kg/m treo trên hai gố cùng độ cao ; khoảng cách hai gố là 40m và độ võng của dây là 1m .

Hãy xác định lực căng trong dây.

- 14.2.** Một dây mềm bằng thép, diện tích mặt cắt ngang $F = 0,5\text{cm}^2$, buộc vào gố A cố định và vắt qua ròng rọc B. Trọng lượng căng dây là $Q = 3,5\text{kN}$ (xem hình 14–19). Khoảng cách $AB = 80\text{m}$. Hãy xác định độ võng của dây (bỏ qua ma sát tại ròng rọc).



Hình 14–19

- 14.3.** Một dây cáp mềm đặt trên hai gố cùng độ cao. Thép có trọng lượng riêng $0,08 \text{ N/cm}^3$ và ứng suất cho phép 30 kN/cm^2 .

Hãy xác định giá trị giới hạn của nhịp khi :

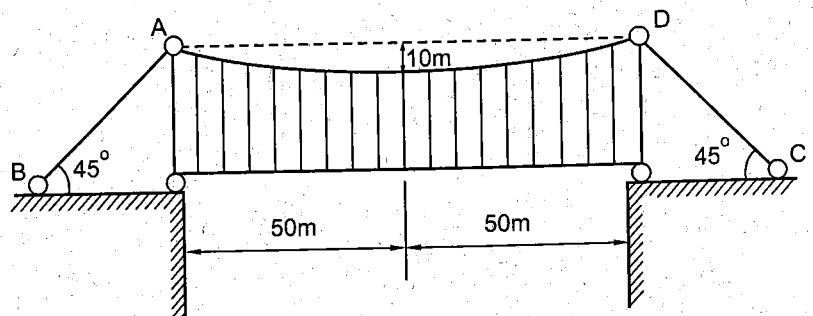
$$\frac{f}{l} = \frac{1}{100} \text{ và } \frac{1}{10}$$

Khi tính coi dây bị căng đều bởi lực căng tại mặt cắt thấp nhất.

- 14.4.** Một cầu treo có hai dây cáp nhịp $l = 120\text{m}$ và độ võng $f = 10\text{m}$. Tải trọng rải đều trên cầu là 60kN/m . Hãy xác định diện tích mặt cắt ngang dây cáp, cho biết $[\sigma] = 40\text{kN/cm}^2$.

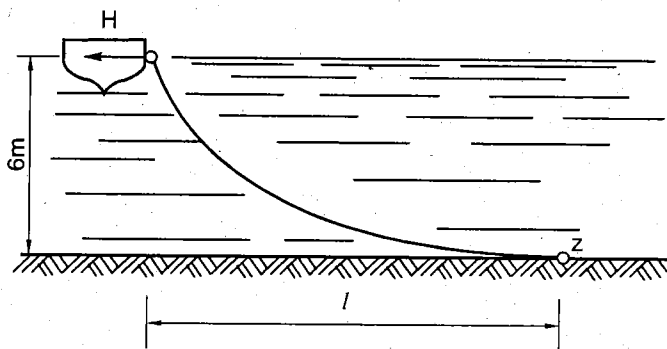
- 14.5.** Một cầu treo có sơ đồ tính như trên hình 14–20. Tải trọng tác dụng lên dây bằng 50 kN/m . Xác định diện tích mặt cắt ngang của dây giằng AB và CD, biết rằng ứng suất cho phép :

$$[\sigma] = 30 \text{ kN/cm}^2.$$



Hình 14–20

- 14.6. Một dây cáp neo tàu có diện tích mặt cắt ngang $F = 5\text{cm}^2$. Tại điểm tiếp xúc với đất dây nằm ngang. Xác định khoảng cách l , biết lực kéo nằm ngang tác dụng vào tàu là 1 kN (h.14-21).

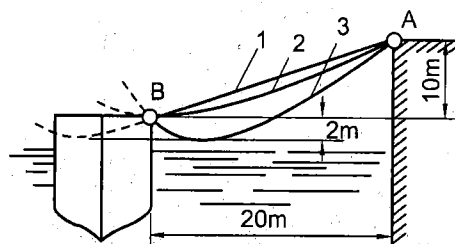


Hình 14-21

- 14.7. Một dây cáp bên bằng sợi nhôm có lõi thép, đặt trên hai gối cùng độ cao, nhịp l và mũi tên f .

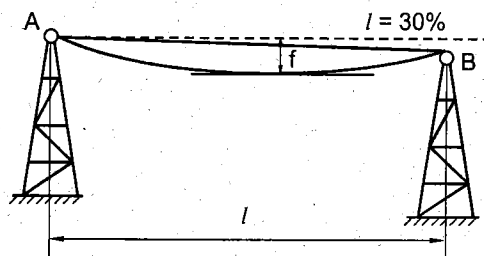
Tính lực căng trong từng loại vật liệu.

- 14.8. Một dây mềm treo trên hai gối có độ cao chênh lệch là 30cm . Điểm thấp nhất của dây còn thấp hơn gối thấp là 90cm . Khoảng cách nằm ngang giữa hai gối $l = 37\text{m}$. Dây có diện tích mặt cắt ngang $F = 1\text{cm}^2$ và khối lượng riêng $\gamma = 8\text{ g/cm}^3$. Tính lực căng tại điểm thấp nhất và hoành độ của điểm này.



Hình 14-22

- 14.9. Một dây neo tàu có trọng lượng riêng $q = 30\text{ kN/m}$ (h.14-22). Tính lực căng nằm ngang của dây theo ba trường hợp:
1. Điểm thấp nhất ở bên trái điểm B.
 2. Điểm thấp nhất trùng với điểm B.
 3. Điểm thấp nhất ở bên phải điểm B.



Hình 14-23

- 14.10. Một dây điện đặt trên hai gối cách nhau $l = 75\text{m}$. Độ dốc của đường dây $i = 30\%$.

Tải trọng tác dụng lên dây phân bố đều $q = 16\text{ N/m}$ (h.14-23).

Biết điểm thấp nhất của dây cách gối cao $f = 3\text{m}$, tính thành phần nằm ngang của lực căng dây.

- 14.11. Một dây truyền tải đặt trên hai gối cách nhau 20m về chiều cao, nhịp 80m , có diện tích mặt ngang $0,8\text{cm}^2$ và mũi tên $f = 4\text{m}$. Trọng lượng riêng của dây 8N/m , môđun đàn hồi $E = 1,6 \cdot 10^7\text{ N/cm}^2$.

Tính lực căng ngang khi có tải trọng $P = 2\text{kN}$ đặt tại điểm C cách gối thấp nhất 20m theo phương nằm ngang.

- 14.12. Một dây đồng có diện tích mặt cắt ngang 80 mm^2 đặt trên hai gối ngang mức nhau, nhịp $l = 120\text{m}$, và mũi tên võng $f = 6\text{m}$.

Tìm độ tăng ứng suất khi nhiệt độ giảm 25° , biết trọng lượng riêng của dây $q_2 = 8,62\text{N/m}$, hệ số giãn vì nhiệt $\alpha = 167 \cdot 10^{-7}$, môđun đàn hồi của dây $E = 12 \cdot 10^6\text{ N/cm}^2$.

Chương 15

TÍNH CHUYỂN VỊ THEO PHƯƠNG PHÁP NĂNG LƯỢNG

Trong các chương trước ta đã tính được chuyển vị của mặt cắt ngang trong những trường hợp thanh chịu lực đơn giản như kéo nén đúng tâm, uốn ngang phẳng, xoắn thuần túy... Để tính chuyển vị cho hệ thanh khi chịu lực phức tạp thì ta phải sử dụng phương pháp năng lượng. Chương này đề cập đến phương pháp đó.

§15-1. CÔNG ĐÀN HỒI VÀ CÔNG KHẢ DI

Giả sử có một thanh chịu lực như hình vẽ. Trên hình 15-1a là trạng thái chưa chịu tải. Trên hình 15-1b là trạng thái chịu tác động của lực P_1 . Quá trình diễn biến của giai đoạn này như sau : Tăng trị số lực P_1 dần dần từ 0 đến P_1 . Trong quá trình đó, độ võng của dầm cũng tăng dần dần từ 0 đến một vị trí xác định Δ_1 . Tương quan giữa P_1 và Δ_1 là tương quan đàn hồi. Ta có thể biểu diễn tương quan đó như hình 15-2. Vậy công đàn hồi mà P_1 thực hiện được là :

$$A_1 = \frac{P_1 \cdot \Delta_1}{2} \quad (15-1)$$

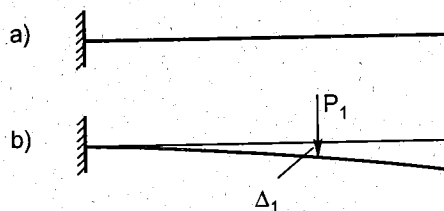
Ta xét thêm một trạng thái chịu lực thứ ba. Tại đầu mút của dầm, đặt thêm một lực P_2 . Cách đặt lực P_2 giống như cách đặt lực P_1 . Nghĩa là cũng tăng lực P_2 từ 0 đến một trị số xác định P_2 .

Vậy P_2 cũng thực hiện một công đàn hồi là :

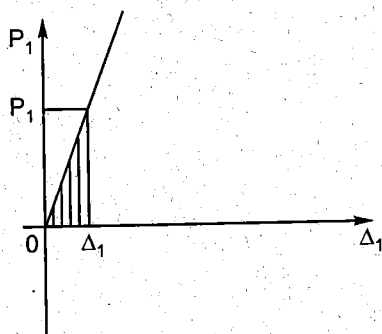
$$A_2 = \frac{P_2 \Delta_2}{2} \quad (15-2)$$

Ngoài công đó P_2 còn tạo nên một công khác : Trong quá trình P_2 thực hiện độ võng Δ_2 , P_1 còn làm cho P_1 di chuyển thêm một đoạn đường Δ_{21} . Sự di chuyển của P_1 lần này là toàn bộ P_1 thực hiện một chuyển động Δ_{21} . Vậy công đó là :

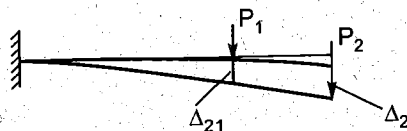
$$A_{21} = P_1 \cdot \Delta_{21} \quad (15-3)$$



Hình 15-1



Hình 15-2



Hình 15-3

Công này được gọi là công khả dĩ.

Có thể dựa vào công đàn hồi hoặc công khả dĩ để tính chuyển vị. Sau đây sẽ lần lượt trình bày hai phương pháp đó.

§15-2. SỬ DỤNG CÔNG ĐÀN HỒI ĐỂ XÁC ĐỊNH CHUYỂN VỊ

1. Định lý Castiglianô. Định lý phát biểu như sau :

Đạo hàm riêng phần của thế năng biến dạng đàn hồi đối với một thành phần lực nào đó đã tạo nên thế năng đó đúng bằng chuyển vị của lực đó.

Thế năng đàn hồi tích lũy trong hệ do một hệ ngoại lực gây nên là một hàm số đối với hệ lực đó : Ví dụ các lực đó là $P_1, P_2, P, \dots P_n$ thì :

$$U(P_1 P_2 \dots P_n)$$

Nếu ta lấy đạo hàm riêng phần của U đối với P_n chẳng hạn thì đạo hàm riêng phần đó đúng bằng chuyển vị của P_n .

$$\frac{\partial U}{\partial P_n} = \Delta_n \quad (15-4)$$

Trong đó Δ_n là chuyển vị của P_n .

Chúng ta dùng lại hệ lực đơn giản ở §15-1 để chứng minh định lý. Dưới tác dụng của P_1, P_2 , trong dầm tích tụ một thế năng biến dạng đàn hồi U . Trị số của U bằng công của ngoại lực.

$$U = \frac{P_1 \Delta_1}{2} + \frac{P_2 \Delta_2}{2} + P_1 \Delta_{21} \quad (15-5)$$

Bây giờ giả sử lực P_2 được tăng lên một lượng vô cùng bé dP_2 . Như vậy thế năng đàn hồi của hệ sẽ tăng lên và có trị số là :

$$U + \frac{\partial U}{\partial P_2} dP_2 \quad (15-6)$$

Giả sử đảo ngược trình tự đặt lực lại : bỏ hết P_1 và P_2 đi và đặt lên dầm lực dP_2 trước, gọi $d(\Delta_2)$ là độ võng do dP_2 gây nên theo phương P_2 . Sau đó ta lại lần lượt đặt các lực P_1, P_2 lên dầm. Với chú ý là độ võng cuối cùng khi đảo ngược trình tự đặt lực phải bằng độ võng ban đầu, ta có trị số của ngoại lực như sau :

$$A_{ng} = \frac{P_1 \Delta_1}{2} + \frac{P_2 \Delta_2}{2} + P_1 \Delta_{21} + \frac{1}{2} dP_2 d(\Delta_2) + dP_2 \Delta_2 \quad (15-7)$$

So sánh (15-7) với (15-6) và chú ý đến (15-5) ta đi đến biểu thức :

$$\frac{\partial U}{\partial P_2} dP_2 = dP_2 \Delta_2 + \frac{dP_2 \cdot d(\Delta_2)}{2}$$

Bỏ qua lượng vô cùng bé bậc cao $dP_2 \cdot d(\Delta_2)$ ta có :

$$\frac{\partial U}{\partial P_2} = \Delta_2 \quad (15-8)$$

Định lí đã được chứng minh.

2. Biểu thức của thế năng biến dạng đàn hồi

Xét một đoạn thanh vô cùng bé dz bằng hai mặt cắt rất gần nhau trong các trường hợp chịu lực sau đây :

a) Kéo nén đúng tâm

Gọi N_z là lực dọc trục trên hai mặt cắt (h.15-4). Tưởng tượng một mặt cắt cố định, lực thứ hai sẽ di chuyển dần dần theo độ giãn của phần tử khi N_z tăng từ 0 đến một trị số xác định. N_z được xem như ngoại lực. Độ giãn của phần tử là :

$$\Delta d_z = \frac{N_z \cdot dz}{EF} \quad (15-9)$$

Công đàn hồi do N_z gây nên là :

$$\frac{1}{2} N_z \Delta d_z = \frac{1}{2} \frac{N_z^2 dz}{EF} \quad (15-10)$$

b) Uốn thuần túy

Mômen uốn M_x gây nên chuyển vị góc tương đối giữa hai mặt cắt. Gọi $\Delta d\phi$ là chuyển vị góc đó, ta có :

$$\Delta d\phi = \frac{M_x dz}{EJ_x} \quad (15-11)$$

Vậy mômen M_x gây nên một công đàn hồi là :

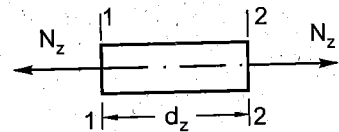
$$\frac{1}{2} M_x \cdot \Delta d\phi = \frac{1}{2} \frac{M_x^2 dz}{EJ_x} \quad (15-12)$$

c) Trượt do lực cắt Q_y

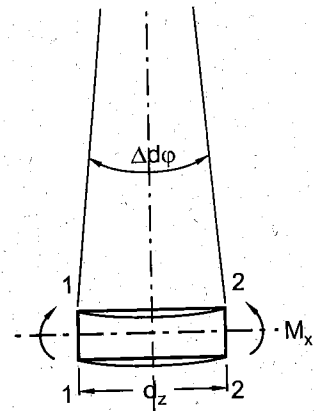
Gọi $\Delta\beta$ là độ trượt giữa hai mặt :

$$\Delta\beta = \frac{\tau_{tb}}{G} \cdot dz = \eta \frac{Q_y}{G \cdot F} dz \quad (15-13)$$

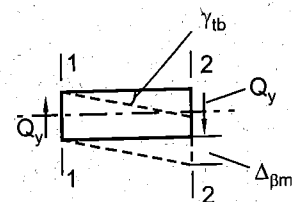
Trong đó ta đã xem sự phân bố của ứng suất tiếp là đều trên mặt cắt và η là hệ số điều chỉnh vì sự phân bố ứng suất là không đều. Trị số η thường được xác định như sau :



Hình 15-4



Hình 15-5



Hình 15-6

- Với mặt cắt ngang là hình chữ nhật $\eta = 1,2$.
- Với mặt cắt ngang là hình tròn $\eta = \frac{32}{27}$.
- Với mặt cắt ngang là hình chữ I $\eta = \frac{F}{F_{\text{lồng}}}$.

F là diện tích toàn phần của mặt cắt ngang.

$F_{\text{lồng}}$ là diện tích ở lòng chữ I.

Như vậy công đàn hồi do Q_y gây nên là :

$$\frac{1}{2} Q_y \Delta\beta = \eta \frac{1}{2} \frac{Q_y}{G.F} dz \quad (15-14)$$

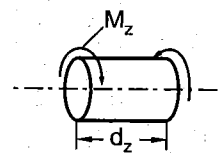
d) Xoắn thuần túy thanh tròn

Góc xoắn tương đối giữa hai mặt cắt là :

$$\Delta\varphi = \frac{M_z dz}{G.J_p} \quad (15-15)$$

Vậy công đàn hồi do mômen xoắn gây nên là :

$$\frac{1}{2} M_z \Delta\varphi = \frac{1}{2} \frac{M_z^2}{GJ_p} dz \quad (15-16)$$



Hình 15-7

Từ đó ta có biểu thức thế năng biến dạng đàn hồi cho một hệ thanh chịu uốn, kéo, cắt như sau :

$$U = \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \frac{1}{2} \frac{N_z^2}{EF} dz + \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \frac{1}{2} \frac{M_x^2}{EJ_x} dz + \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \frac{1}{2} \eta \frac{Q_y^2}{G.F} dz \quad (15-17)$$

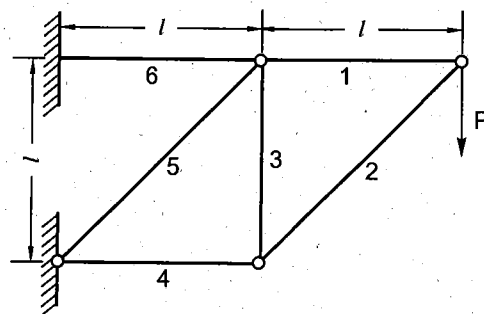
Trong đó : n là số thanh và l_i là độ dài của thanh thứ i .

Trong công thức (15-4), phải hiểu P_n là một lực khái quát. Đó có thể là một lực cũng có thể là một mômen. Như vậy Δ_n cũng là một chuyển vị khái quát. Đó có thể là một chuyển vị dài hay một góc xoay.

Ví dụ 1. Cho hệ thanh chịu lực như hình 15-18. Tìm chuyển vị thẳng đứng của lực. Cho biết độ cứng $E.F$ của các thanh là như nhau.

Bài giải

Trước tiên phải tính nội lực trong các thanh. Dùng phương pháp tách nút ta tìm thấy các nội lực như trong bảng dưới đây, trong bảng đó có tính cả thế năng biến dạng đàn hồi của mỗi thanh.



Hình 15-8

	N_i	l_i	U_i		N_i	l_i	U_i
1	P	l	$\frac{P^2 l}{2EF}$	4	-P	l	$\frac{P^2 l}{2EF}$
2	$-P\sqrt{2}$	$l\sqrt{2}$	$\frac{2P^2 l\sqrt{2}}{2EF}$	5	$-P\sqrt{2}$	$l\sqrt{2}$	$\frac{2P^2 l\sqrt{2}}{2EF}$
3	P	l	$\frac{P^2 l}{2EF}$	6	2P	l	$\frac{4P^2 l}{2EF}$

Thế năng biến dạng đàn hồi của toàn hệ là :

$$U = \frac{P^2 l}{2EF} (7 + 4\sqrt{2})$$

Chuyển vị thẳng đứng tại A sẽ là :

$$\Delta_A = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{Pl}{EF} (7 + 4\sqrt{2})$$

Ví dụ 2. Tính độ võng và góc xoay tại đầu tự do của dầm chịu lực như hình vẽ (h.15-19).

Bài giải

Để thuận lợi, lấy gốc tọa độ tại A.

Bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt Q_y . Vậy chỉ tính với mômen. Mômen trên mặt cắt ở tọa độ z là :

$$M_x = -Pz$$

Vậy
$$U = \int_0^l \frac{M_x^2}{2EJ_x} dz$$

Chuyển vị theo phương của lực P sẽ là :

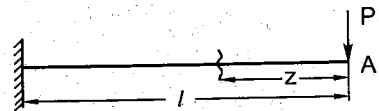
$$\Delta_A = \frac{\partial U}{\partial P} = \int_0^l M_x \frac{\partial M_x}{\partial P} \frac{dz}{EJ_x}$$

$$\Delta_A = \int_0^l (-Pz)(-z) \frac{dz}{EJ_x}$$

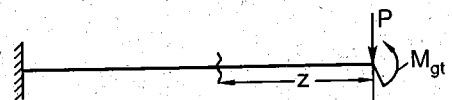
$$\Delta_A = \frac{Pl^3}{3EJ_x}$$

Để tính góc xoay tại A ta đặt thêm một mômen giả tạo tại đó (h.15-20), mômen nội lực tại mặt cắt z là :

$$M_x = -Pz + M_{gt}$$



Hình 15-19



Hình 15-20

$$\frac{\partial M_x}{\partial M_{gt}} = 1$$

$$\theta_A = \frac{\partial U}{\partial M_{gt}} = \int_0^l (-P_z + M_{gt}) \cdot 1 \cdot \frac{dz}{EJ_x} \quad (M_{gt} = 0)$$

$$\theta_A = -\frac{Pl^2}{2EJ_x} \quad (\text{góc xoay ngược chiều với } M_{gt})$$

§15-3. NGUYÊN LÝ CHUYỂN VỊ KHẢ DĨ

Người đầu tiên phát biểu nguyên lý này là Bécnu-li, sau đó Lagrăng đã hoàn thiện và đã trình bày trong sách giáo khoa cơ giải tích. Sách sau này được dịch từ tiếng Pháp sang tiếng Nga và xuất bản tại Matxcơva năm 1950.

Nguyên lý được phát biểu như sau :

Để một hệ có các liên kết lí tưởng ở trạng thái cân bằng tại một vị trí nào đó, điều kiện cần và đủ là tổng công của tất cả các lực đặt lên hệ trong các chuyển vị khả dĩ vô cùng bé là bằng không.

Chuyển vị khả dĩ là chuyển vị vô cùng bé sao cho trong các chuyển vị đó các liên kết của hệ thống không bị phá vỡ.

Một liên kết lí tưởng là một liên kết mà tổng công của các phản lực trong tất cả mọi chuyển vị khả dĩ của hệ là bằng không:

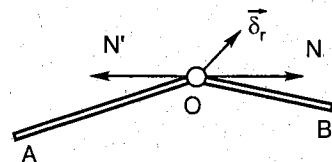
Các trường hợp sau đây có thể xem là những liên kết lí tưởng :

1. Một chất điểm hoặc một vật rắn luôn luôn tì lên một mặt nhẵn cố định. Vì mặt nhẵn nên không có lực ma sát, phản lực liên kết có phương theo pháp tuyến với bề mặt. Các chuyển vị khả dĩ chỉ có thể xảy ra trong mặt phẳng tiếp tuyến với mặt tì và như vậy công của các phản lực trong các chuyển vị đó là bằng không.

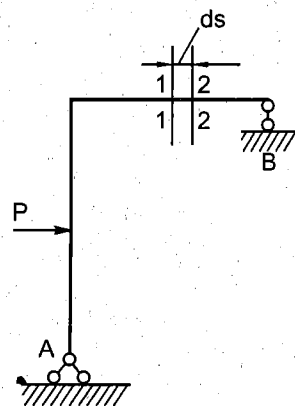
2. Các liên kết là bất động, nghĩa là phản lực liên kết không gây nên công.

3. Khớp nối giữa hai vật thể. Khớp này tạo nên các phản lực ngược chiều nên công của chúng trong các chuyển vị khả dĩ δ_r là bằng không (h.15-21).

Ta hãy áp dụng nguyên lý trên cho một vật thể đàn hồi. Ví dụ có hệ đàn hồi được biểu diễn trên hình 15-22. Gọi



Hình 15-21



Hình 15-22

ds là một phần tử vô cùng bé tách ra bởi hai mặt cắt (1-1) và (2-2) cách nhau một khoảng cách ds .

Hệ được xem như một tập hợp các phần tử đàn hồi ds . Dưới tác dụng của ngoại lực P và các phản lực R tại A và B, trên các mặt cắt (1-1) và (2-2) xuất hiện các thành phần nội lực. Bây giờ ta gây cho hệ một chuyển vị khả dĩ. Một chuyển vị như vậy chỉ có thể có được bằng cách đặt một hệ lực mới nào đó tạo cho hệ một trạng thái biến dạng mới hay làm cho hệ biến dạng bằng nhiệt độ. Ta nhận thấy công khả dĩ ở đây không phải chỉ có công A_{ng} do ngoại lực tạo nên mà còn có công khả dĩ A_n do nội lực tạo nên. Do đó ta có :

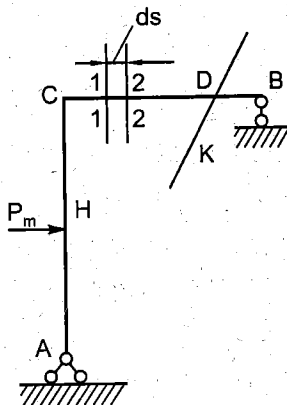
$$A_{ng} + A_n = 0 \quad (1)$$

Đó là biểu thức của nguyên lí chuyển vị khả dĩ áp dụng cho một hệ đàn hồi.

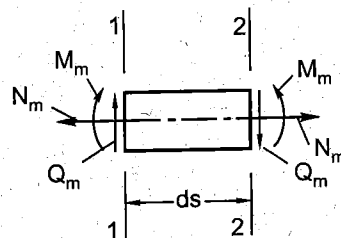
§15-4. CÔNG THỨC MO ĐỂ XÁC ĐỊNH CHUYỂN VỊ

Trước hết ta hãy đề cập đến bài toán phẳng.

Bài toán đặt ra như sau : cho khung phẳng chịu lực như hình 15-23. Yêu cầu tính chuyển vị theo phương k của trọng tâm mặt cắt qua D.



Hình 15-23



Hình 15-24

Gọi trạng thái chịu lực đã cho là trạng thái "m". Nghĩa là ngoại lực cũng như nội lực ở trạng thái này được dùng chỉ số m để đánh dấu. Chuyển vị theo phương k do lực ở trạng thái "m" gây nên được kí hiệu là Δ_{km} . Ngoại lực và phản lực P_m và R_m cũng gây nên các chuyển vị cho một phần tử ds bất kì nào đó của hệ. Thực vậy, gọi N_m , Q_m và M_m là các thành phần nội lực trên các mặt cắt (1-1) và (2-2) của ds (h.15-24) do P_m và R_m gây nên, các thành phần nội lực đó tạo nên các chuyển vị tương đối giữa hai mặt cắt (1-1) và (2-2) như sau :

1. Chuyển vị dọc theo chiều trục :

$$\Delta ds_m = \frac{N_m ds}{EF} \quad (2)$$

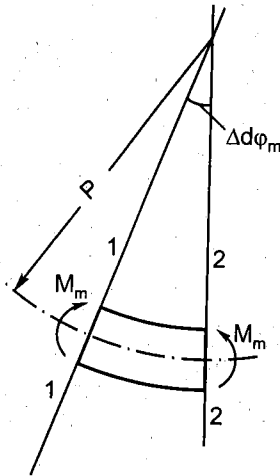
2. Chuyển vị góc tương đối
(h.15-25) :

$$\Delta d\varphi_m = \frac{M_m ds}{EJ} \quad (3)$$

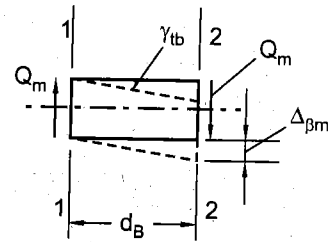
3. Chuyển vị trượt tương đối
giữa hai mặt cắt (h.15-26)

$$\Delta\beta_m = \gamma_{tb} ds \quad (4)$$

γ_{tb} là góc trượt tỉ đối trung bình.
Giá trị góc trượt đó tỉ lệ với
ứng suất tiếp do Q_m gây nên
trên các mặt cắt. Ta có thể tính
trị số ứng suất tiếp trung bình
với công thức :



Hình 15-25



Hình 15-26

$$\tau_{tb} = \eta \frac{Q_m}{F}$$

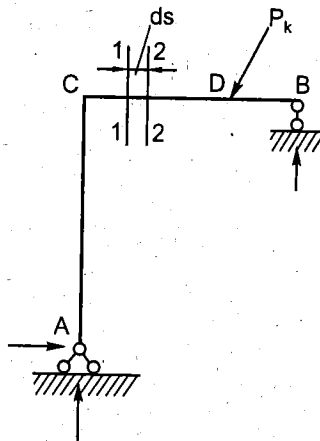
trong đó η là một hệ số điều chỉnh vì ứng suất tiếp do Q_m gây nên là phân bố không đều
trên mặt cắt như đã nói ở trên.

Từ đó ta có :

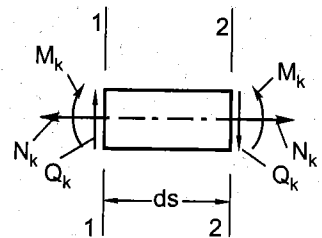
$$\Delta\beta_m = \frac{\tau_{tb}}{G} ds = \eta \frac{Q_m ds}{GF}$$

Bây giờ ta hãy tưởng tượng
tạo nên một trạng thái "k" bằng
cách bỏ tất cả các ngoại lực ở
trạng thái "m" và đặt vào phương
"k" một lực P_k (h.15-27). P_k và
các phản lực R_k gây nên các
thành phần nội lực N_k , Q_k và
 M_k trên các mặt cắt (1-1) và
(2-2) (hình 15-28).

Vì hệ là một hệ cân bằng
nên công của ngoại lực và nội
lực của hệ trong bất kì một
chuyển vị khả dĩ nào cũng phải
bằng không.



Hình 15-27



Hình 15-28

Ta hãy chọn ngay trạng thái biến dạng của trạng thái "m" như là các chuyển vị khả dĩ.
Công của ngoại lực khi đó là $P_k \Delta_{km}$; còn công của nội lực thì chưa tính được nhưng ta
phải có :

$$P_k \Delta_{km} + A_n = 0 \quad (5)$$

Ở đây chú ý rằng các phản lực R_k tại A và B không sinh công vì các gối tựa đó bất động.

Để tính công A_n ta để ý đến phần tử ds . Các thành phần nội lực N_k , Q_k và M_k trên các mặt cắt (1-1) và (2-2) đối với phần tử lại là ngoại lực. Phần tử đó có các chuyển vị khả dĩ Δds_m , $\Delta \beta_m$ và $\Delta d\varphi_m$. Công ngoại lực lúc này là : (công này là công khả dĩ)

$$dA_{ng} = N_k \Delta ds_m + Q_k \Delta \beta_m + M_k \Delta d\varphi_m$$

Theo nguyên lí chuyển vị khả dĩ ta phải có :

$$N_k \Delta ds_m + Q_k \Delta \beta_m + M_k \Delta d\varphi_m + dA_n = 0 \quad (6)$$

Từ đó ta có :

$$dA_n = - \left(\frac{M_k M_m ds}{EJ} + \frac{N_k N_m ds}{EF} + \eta \frac{Q_k Q_m ds}{GF} \right) \quad (7)$$

Vậy : công của nội lực của toàn hệ sẽ là :

$$A_n = - \left(\sum \int \frac{M_k M_m ds}{EJ} + \sum \int \frac{N_k N_m ds}{EF} + \sum \int \eta \frac{Q_k Q_m ds}{GF} \right) \quad (8)$$

Dấu tổng $\sum$ ở đây để chỉ tổng các đoạn thanh trong hệ và dấu tích phân là để chỉ phép toán tích phân trên suốt chiều dài của mỗi đoạn thanh :

Thay (8) vào (5) ta có :

$$P_k \Delta_{km} = \sum \int \frac{M_k M_m ds}{EJ} + \sum \int \frac{N_k N_m ds}{EF} + \sum \int \frac{Q_k Q_m ds}{GF} \eta \quad (9)$$

Nếu đem chia cả hai vế cho P_k hay nói một cách khác trong trạng thái "k" lấy lực $P_k = 1$ không có thứ nguyên thì từ đó ta có công thức của chuyển vị Δ_{km} :

$$\Delta_{km} = \sum \int \frac{\bar{M}_k M_m ds}{EJ} + \sum \int \frac{\bar{N}_k N_m ds}{EF} + \sum \int \eta \frac{\bar{Q}_k Q_m ds}{GF} \quad (15-18)$$

Trong đó $\bar{M}_k$, $\bar{Q}_k$ và $\bar{N}_k$ là các thành phần nội lực trong hệ do $P_k = 1$ gây nên.

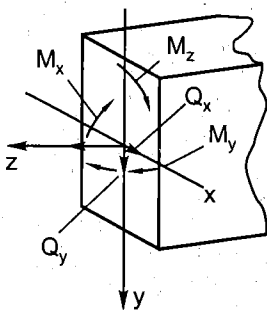
Công thức đó được gọi là công thức Mo.

Đối với bài toán không gian, khi trên các mặt cắt ngang có đầy đủ sáu thành phần nội lực thì công thức Mo sẽ có dạng như sau :

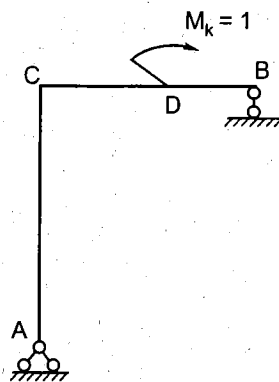
$$\begin{aligned} \Delta_{km} = & \sum \int \frac{\bar{M}_{xk} M_{xm} dz}{EJ_x} + \sum \int \frac{\bar{M}_{yk} M_{ym} dz}{EJ_y} + \sum \int \frac{\bar{M}_{zk} M_{zm} dz}{EJ_p} + \\ & + \sum \int \frac{\bar{N}_{zk} N_{zm} dz}{EF} + \sum \int \eta \frac{\bar{Q}_{yk} Q_{ym} dz}{GF} + \sum \int \eta \frac{\bar{Q}_{xk} Q_{xm} dz}{GF} \end{aligned} \quad (15-19)$$

trong đó dz là độ dài của phân tố $dz = ds$ và các thành phần nội lực được biểu diễn như trên hình 15-29.

Trên đây ta đã tìm chuyển vị thẳng theo phương k . Tất cả các chứng minh trên cũng hoàn toàn đúng khi cần tìm góc xoay của mặt cắt ngang tại một vị trí nào đó của hệ. Hay một cách rộng hơn, khi ta cần tìm chuyển vị thẳng tương đối hay góc xoay tương đối của hai mặt cắt tại hai điểm bất kì nào đó của hệ. Khi đó ta sẽ tạo nên trạng thái "k" bằng cách đặt một mômen tập trung một hệ hai lực ngược chiều hay hai mômen ngược chiều không có thứ nguyên và có trị số bằng đơn vị.



Hình 15-29



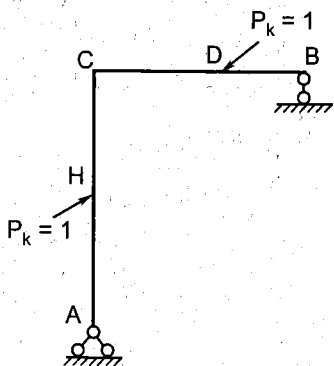
Hình 15-30

Kí hiệu Δ_{km} , tùy theo trường hợp, sẽ có nghĩa là góc xoay của mặt cắt ngang, độ dịch gần hay chuyển xa của hai trọng tâm hai mặt cắt và góc xoay tương đối của hai mặt cắt.

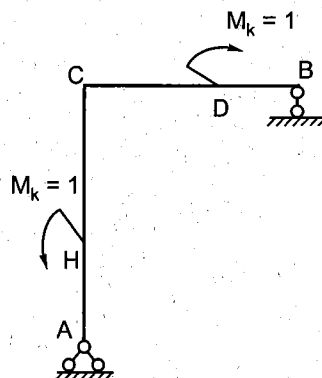
Ví dụ để tìm góc xoay của mặt cắt D ta tạo nên trạng thái "k", như trên hình 15-30.

Để tính độ dịch gần giữa hai điểm D, H ta tạo nên trạng thái "k" như trên hình 15-31.

Để tính góc xoay tương đối giữa hai mặt cắt ngang qua D và H, tạo nên trạng thái "k" như trên hình 15-32.



Hình 15-31



Hình 15-32

§15-5. MỘT SỐ ĐỊNH LÝ QUAN TRỌNG

1. Định lý về công tương hỗ (còn gọi là định lý Bét-ti)

Định lý phát biểu như sau :

Công của ngoại lực ở trạng thái "m" trên chuyển vị của trạng thái "k" là bằng công của ngoại lực ở trạng thái "k" thực hiện trên chuyển vị của trạng thái "m".

Thực vậy, từ biểu thức "9" ta luôn luôn có :

$$P_k \Delta_{km} = P_m \Delta_{mk} = \sum \int \frac{M_k M_m ds}{EJ} + \sum \int \frac{N_k N_m ds}{EF} + \sum \int \frac{\eta Q_k Q_m ds}{GF}$$

2. Định lí về chuyển vị đơn vị

Nếu hai trạng thái "m" và "k" đều là trạng thái do lực đơn vị tác dụng theo phương m và phương k gây nên, khi đó các chuyển vị Δ_{km} và Δ_{mk} là các chuyển vị đơn vị và được kí hiệu là δ_{km} và δ_{mk} .

Ta dễ dàng thấy

$$\delta_{km} = \delta_{mk} \quad (15-20)$$

Thật vậy vì :

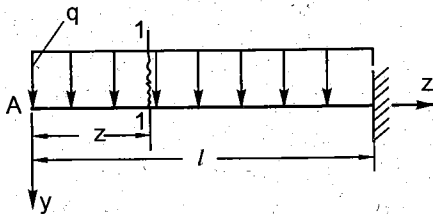
$$\delta_{km} = \delta_{mk} = \sum \int \frac{\bar{M}_k \bar{M}_m ds}{EJ} + \sum \int \frac{\bar{N}_k \bar{N}_m ds}{EF} + \sum \int \frac{\eta \bar{Q}_k \bar{Q}_m ds}{GF}$$

Do đó ta có thể phát biểu định lí như sau :

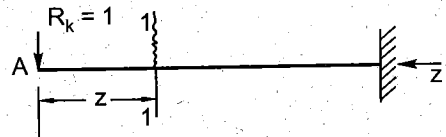
Chuyển vị đơn vị theo phương k do lực đơn vị theo phương m gây nên là bằng chuyển vị theo phương m do lực đơn vị theo phương k gây nên.

Ví dụ 3. Cho dầm chịu lực như hình 15-33. Xác định độ võng và góc xoay tại A (bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt đối với chuyển vị của dầm).

Độ cứng EJ_x của dầm là hằng số.



Hình 15-33



Hình 15-34

Bài giải

Ta xem trạng thái đã cho của dầm là trạng thái "m". Hệ trục tọa độ được chọn như hình vẽ. Gọi z là hoành độ của mặt cắt (1-1). Mômen uốn M_m trên mặt cắt đó có trị số là :

$$M_m = -q \frac{z^2}{2} \quad (a)$$

Để tính độ võng tại A ta tạo nên trạng thái "k" như hình 15-34. Mômen uốn trên mặt cắt (1-1) là :

$$M_k = -z \quad (b)$$

Ở đây bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt, còn lực dọc N_z là bằng không, do đó chuyển vị thẳng đứng tại A sẽ có trị số là :

$$\Delta_{km} = y_A = \int_0^1 \frac{\bar{M}_k M_m dz}{EJ_x} = \int_0^1 q \cdot \frac{z^3}{2} \cdot \frac{1}{EJ_x} dz$$

$$y_A = \frac{qz^4}{8EJ_x}$$

Để tính góc xoay tại A, tạo nên trạng thái "k" như hình 15-35. Khi đó ta có :

$$M_k = -1$$

Vậy :

$$\Delta_{km} = \theta_A = \int_0^1 \frac{\bar{M}_k M_m dz}{EJ_x}$$

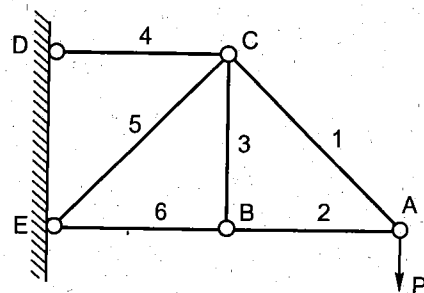
$$\theta_A = \int_0^1 q \cdot \frac{z^2}{2} \cdot \frac{dz}{EJ_x} = \frac{qz^3}{6EJ_x}$$



Hình 15-35

Các kết quả nhận được trên đây là những trị số dương, điều đó có nghĩa là độ võng và góc xoay cùng chiều với P_k và M_k .

Ví dụ 4. Cho giàn chịu lực như hình 15-36, tìm chuyển vị thẳng đứng tại A. Các thanh đều cùng làm bằng một loại vật liệu và cùng có mặt cắt như nhau.



Hình 15-36

Bài giải

Ta xem trạng thái đã cho của hệ là trạng thái "m". Trị số lực dọc trong các thanh như sau :

$$\begin{aligned} N_m^1 &= P\sqrt{2} ; & N_m^2 &= -P \\ N_m^3 &= 0 ; & N_m^4 &= 2P \\ N_m^5 &= -P\sqrt{2} ; & N_m^6 &= -P \end{aligned}$$

Để tìm chuyển vị thẳng đứng tại A ta bỏ lực P đi và thay vào đó lực $P_k = 1$. Trị số nội lực trong các thanh sẽ là :

$$\begin{aligned} \bar{N}_k^1 &= \sqrt{2} ; & \bar{N}_k^2 &= -1 ; & \bar{N}_k^3 &= 0 \\ \bar{N}_k^4 &= 2 ; & \bar{N}_k^5 &= -\sqrt{2} ; & \bar{N}_k^6 &= -1. \end{aligned}$$

Ở đây mômen uốn và lực cắt bằng không nên chuyển vị thẳng đứng tại A sẽ là :

$$\Delta_{km} = y_A = \sum \int_0^1 \frac{\bar{N}_k N_m ds}{EF}$$

$$y_A = \frac{P\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot a\sqrt{2}}{EF} + \frac{P \cdot 1a}{EF} + \frac{2Pa \cdot 2}{EF} + \frac{P\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot a\sqrt{2}}{EF} + \frac{P \cdot 1 \cdot a}{EF}$$

$$= (6 + 4\sqrt{2}) \frac{Pa}{EF}$$

§ 15-6. PHƯƠNG PHÁP NHÂN BIỂU ĐỒ CỦA VÊRÊSAGHIN

Khi mặt cắt ngang của thanh không thay đổi hay thay đổi trên từng đoạn, khi đó các tích phân trong công thức Mo (15-18) sẽ có dạng sau đây :

$$I = \int_0^l F(z) \cdot f(z) dz \quad (10)$$

trong đó luôn luôn có một hàm số bậc nhất. Thực vậy, vì các biểu đồ nội lực trong trạng thái "k" là do lực tập trung hay mômen tập trung gây nên. Trong trường hợp đó phép tích phân có thể thực hiện một cách đơn giản như sau :

Ta giả thiết trên một đoạn dài từ 0 đến l nào đó của thanh hàm số $f(z)$ là một đường cong bất kì còn $F(z)$ là một đường thẳng có phương trình :

$$F(z) = az + b \quad (11)$$

Các hàm số đó được biểu diễn như trên hình 15-37.

Đem thay (11) vào (10) ta được :

$$I = \int_{\Omega} (az + b) \cdot f(z) dz \quad (12)$$

trong đó tích $f(z)dz$ là vi phân diện tích $d\Omega$ của biểu đồ $f(z)$. Ta có thể viết (12) lại dưới dạng :

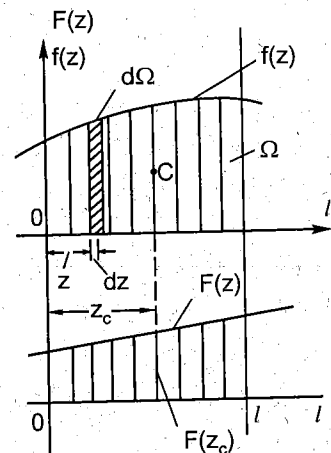
$$I = \int_{\Omega} (az + b) d\Omega = a \int_{\Omega} z d\Omega + b \int_{\Omega} d\Omega \quad (13)$$

trong đó : $\int_{\Omega} d\Omega$ là diện tích Ω của biểu đồ $f(z)$ từ 0 đến l và $\int_{\Omega} z d\Omega$ là mômen tĩnh của Ω đối với trục tung.

Trị số này có thể tính với biểu thức :

$$\int_{\Omega} z d\Omega = z_c \Omega$$

trong đó : z_c là hoành độ trọng tâm của Ω .



Hình 15-37

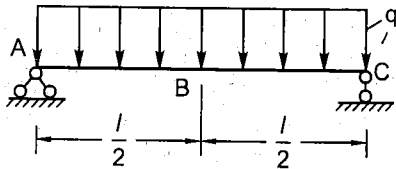
Vậy biểu thức (13) có thể được viết lại dưới dạng :

$$I = az_C \Omega + b \Omega = \Omega (az_C + b) \quad (14)$$

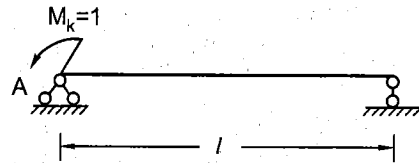
trong đó $az_C + b = f'(z_C)$ là tung độ của biểu đồ $F(z)$ tại hoành độ z_C của biểu đồ $f(z)$. Vậy :

$$I = \Omega F(z_C) \quad (15-21)$$

Ví dụ 5. Tìm độ võng tại B và góc xoay tại A của dầm chịu lực như trên hình 15-38 (bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt).



Hình 15-38



Hình 15-39

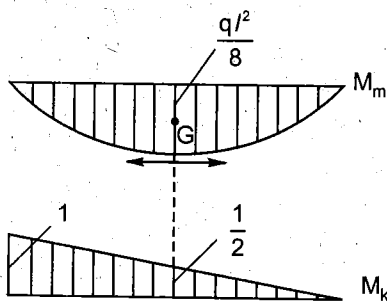
Bài giải

Ta hãy tìm góc xoay tại A. Tạo nên trạng thái "k" (h.15-39). Vì bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt nên góc xoay tại A sẽ được tính với biểu thức :

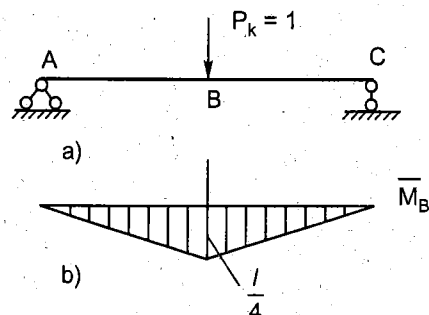
$$\Delta_{km} = \theta_A = \int_0^l \frac{\bar{M}_k M_m ds}{EJ}$$

Các biểu đồ M_m và $\bar{M}_k$ được biểu diễn như trên hình 15-40. Theo phép nhân Vêrêsgahin ta có :

$$\theta_A = -\frac{2}{3} q \frac{l^2}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{EJ_x} = -\frac{ql^3}{24EJ_x}$$



Hình 15-40



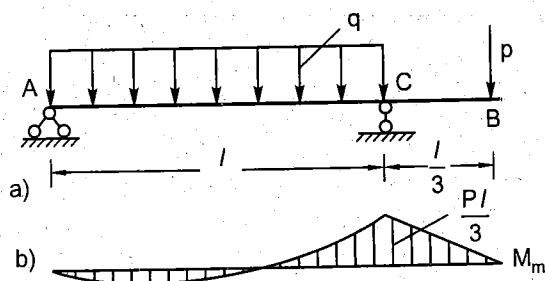
Hình 15-41

Kết quả mang dấu âm (vì hai biểu đồ có thứ căng khác nhau) điều đó có nghĩa là góc xoay tại A có chiều ngược lại với chiều của M_k đã chọn. Để tìm độ võng tại B ta tạo nên trạng thái "k" (h.15-41a). Biểu đồ mô men M_k được biểu diễn trên hình 15-41b.

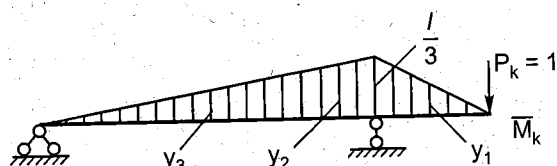
Ở đây ta nhận thấy trong hai đoạn AB và BC biểu đồ $\bar{M}_k$ được biểu diễn bằng các đường thẳng khác nhau, vì vậy để tính biểu thức tích phân ta cũng phải chia biểu đồ M_m theo hai phần từ A đến B và từ B đến C. May mắn ở đây biểu đồ đối xứng nên ta có thể tính một phía và đem nhân đôi để có nghiệm.

$$\Delta_{km} = y_B = 2 \cdot \frac{2}{3} q \cdot \frac{l^2}{8} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{l}{8} \cdot \frac{1}{EJ_x} = \frac{5}{384} \cdot \frac{ql^4}{EJ_x}$$

Ví dụ 6. Tìm độ võng tại B của dầm chịu lực như trên hình 15-42a (bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt).



Hình 15-42

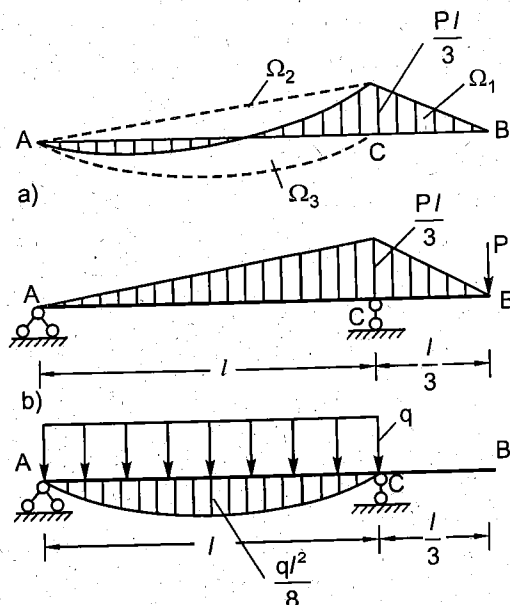


Hình 15-43

Bài giải

Biểu đồ mômen ở trạng thái "m" được biểu diễn trên hình 15-42b. Để tìm chuyển vị tại B, ta tạo ra trạng thái "k" (h.15-43), biểu đồ mômen $\bar{M}_k$ cũng được biểu diễn trên hình đó.

Nhận thấy rằng phép nhân biểu đồ Verésaghin giữa hai biểu đồ M_m và $\bar{M}_k$ là rất phức tạp vì khó xác định trọng tâm các diện tích của M_m trong khoảng AC. Để tránh sự phức tạp đó ta có thể xem biểu đồ M_m trong khoảng AC như tổng cộng của một biểu đồ bậc nhất và một đường bậc hai (h.15-44a). Điều đó cũng giống như chúng ta đã xem rằng trạng thái "m" là tổng cộng của hai trạng thái: trạng thái chỉ có một mình lực P tác dụng và trạng thái chỉ có một mình lực q tác dụng (h.15-44b).

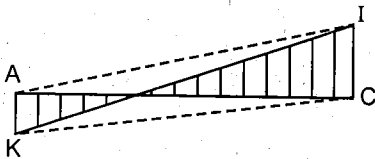


Hình 15-44

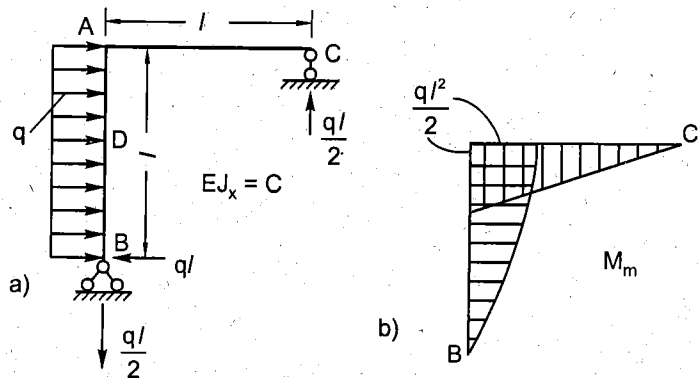
Với cách đó ta có thể thực hiện được phép nhân một cách dễ dàng :

$$\begin{aligned}\Delta_{km} = y_B &= \sum \int \frac{\bar{M}_k M_m ds}{EJ_x} = (\Omega_1 y_1 + \Omega_2 y_2 + \Omega_3 y_3) \frac{1}{EJ_x} = \\ &= \left(\frac{1}{2} P \frac{l}{3} \cdot \frac{l}{3} \cdot \frac{2}{3} \frac{l}{3} + \frac{1}{2} \cdot P \frac{l}{3} \cdot l \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{ql^2}{8} \cdot l \frac{1}{2} \frac{l}{3} \right) \frac{1}{EJ_x} \\ y_B &= \frac{4Pl^3}{81EJ_x} - \frac{ql^4}{72EJ_x}\end{aligned}$$

Ghi chú : Tương tự như trên, nếu gặp trường hợp biểu đồ trong đó nếu AC là đường thẳng IK cắt qua trục hoành (h.15-45) thì ta có thể xem biểu đồ đó là tổng của các biểu đồ biểu diễn bởi các đường AI và KC.



Hình 15-45



Hình 15-46

Ví dụ 7. Tìm chuyển vị ngang tại A và góc xoay tương đối giữa hai mặt cắt tại gối tựa B và C của khung chịu lực như hình vẽ (h.15-46a). Giả thiết bỏ qua ảnh hưởng của lực dọc và lực cắt đến chuyển vị của khung.

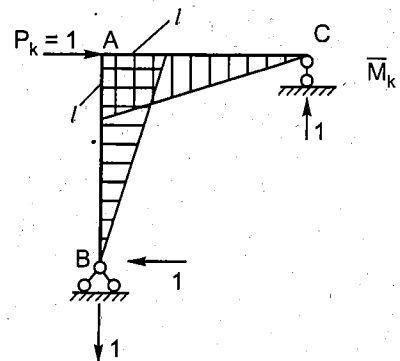
Bài giải

Ta xem trạng thái chịu lực của khung là trạng thái "m". Biểu đồ M_m được biểu diễn như trên hình 15-46b.

Để tìm chuyển vị ngang tại A ta tạo nên trạng thái "k" như trên hình 15-47.

Chuyển vị ngang tại A sẽ là :

$$\begin{aligned}\Delta_{km} = y_A &= \sum \int \frac{\bar{M}_k M_m ds}{EJ_x} \\ y_A &= \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{ql^2}{2} \cdot l \frac{2}{3} \cdot l + \frac{2}{3} \cdot \frac{ql^2}{2} \cdot l \frac{5}{8} l \right) \frac{1}{EJ_x} = \frac{3ql^4}{8EJ_x}\end{aligned}$$



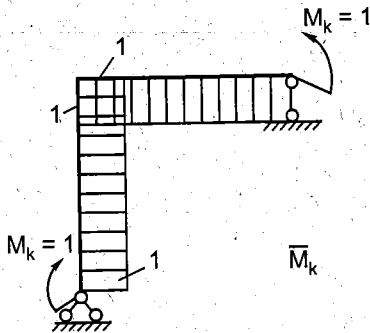
Hình 15-47

Để tìm góc xoay tương đối giữa hai mặt cắt B và C ta tạo nên trạng thái "k" như hình 15-48.

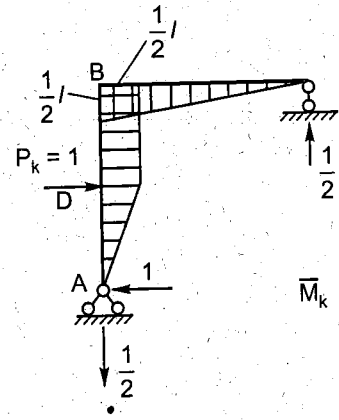
Ta có :

$$\Delta_{km} = \theta_{BC} = \sum \int \frac{\bar{M}_k M_m ds}{EJ_x}$$

$$\theta_{BC} = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{ql^2}{2} l + \frac{2}{3} l \cdot \frac{ql^2}{2} \right) \frac{1}{EJ_x} = \frac{7}{12} \cdot \frac{ql^3}{EJ_x}$$



Hình 15-48



Hình 15-49

Ví dụ 8. Với khung chịu lực trên đây, hãy tìm chuyển vị ngang tại D là điểm giữa của AB.

Bài giải

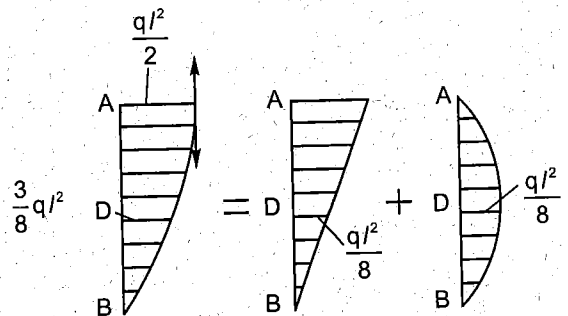
Tạo nên trạng thái "k" như hình 15-49, ta nhận thấy phép nhân biểu đồ Vêrêtaghin trong đoạn AB trở nên phức tạp, vì ta phải chia biểu đồ M_m đó thành hai phần trên hai đoạn AD và DB mà trọng tâm mỗi phần ta đều chưa xác định. Để tránh khó khăn đó ta xem biểu đồ M_m trên đoạn AB như tổng hai biểu đồ (h.15-50).

Với cách đó ta thực hiện được phép nhân Vêrêtaghin dễ dàng :

$$\Delta_{km} = y_D = \sum \int \frac{\bar{M}_k M_m ds}{EJ_x}$$

$$y_D = \left[\frac{ql^2}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2} + 2 \cdot \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{2} + \left(\frac{ql^2}{2} + \frac{2ql^2}{8} \right) \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{l}{2} \right] \frac{1}{EJ_x}$$

$$y_D = \frac{89}{384} \cdot \frac{ql^4}{EJ_x}$$



Hình 15-50

§15-7. TÍNH CHUYỂN VỊ GÂY NÊN DO NHIỆT ĐỘ

Ta hãy xét một phân tố ds của thanh chịu tác dụng của nhiệt (h.15-51). Mặt phía trên chịu tác dụng của nhiệt độ t_1 và mặt dưới ở nhiệt độ t_2 . Gọi t_0 là nhiệt độ ban đầu của hệ và $\bar{\alpha}$ là hệ số giãn vì nhiệt. Như vậy ở mặt trên "ab" phân tố chịu một độ giãn là :

$$\bar{\alpha}(t_1 - t_0).dz$$

và ở mặt dưới "cd" chịu một độ giãn là

$$\bar{\alpha}(t_2 - t_0).dz$$

Như vậy trục của phân tố sẽ có một độ giãn dài là :

$$\Delta dz = \frac{1}{2}[\bar{\alpha}(t_1 - t_0)dz + \bar{\alpha}(t_2 - t_0)dz]$$

$$\Delta dz = \bar{\alpha} \left[\frac{t_1 + t_2}{2} - t_0 \right] dz \quad (15-22)$$

Các mặt cắt sẽ xoay đi với nhau một góc :

$$\Delta \varphi = \frac{\bar{\alpha}(t_2 - t_0)dz - \bar{\alpha}(t_1 - t_0)dz}{h}$$

h là chiều cao của mặt cắt ngang. Viết gọn lại ta có :

$$\Delta \varphi = \frac{\bar{\alpha}(t_2 - t_1)dz}{h} \quad (15-23)$$

Như vậy nếu như trước khi chịu nhiệt, phân tố đã ở trong trạng thái "k" thì trên các mặt cắt đã có các nội lực do P_k gây nên. Ta bỏ qua lực cắt Q_k mà chỉ xét M_k và N_k (h.15-53).

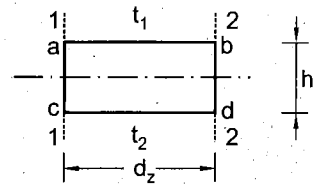
Bây giờ lấy trạng thái nhiệt là trạng thái "m" và đặt lên trạng thái "k". Các thành phần nội lực M_k và N_k sẽ cho chúng ta các công khả dĩ :

$$M_k \cdot \Delta \varphi = \frac{\bar{\alpha}(t_2 - t_1)dz}{h} M_k$$

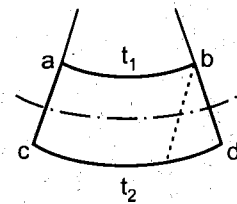
$$N_k \cdot \Delta dz = \bar{\alpha} \left[\frac{t_1 + t_2}{2} - t_0 \right] dz \cdot N_k$$

Tích phân hai lượng đó cho toàn hệ phải bằng công của ngoại lực do P_k gây nên trong chuyển vị Δ_{km} . (Chuyển vị theo phương k do nhiệt độ gây nên). Ta có :

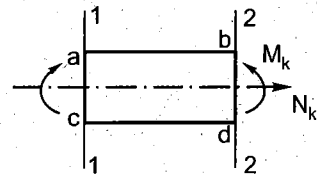
$$P_k \cdot \Delta_{km} = \sum_{i=1}^n \int_0^l \frac{\bar{\alpha}(t_2 - t_1)}{h} M_k dz + \sum_{i=1}^n \int_0^l \bar{\alpha} \left[\frac{t_1 + t_2}{2} - t_0 \right] N_k dz$$



Hình 15-51



Hình 15-52

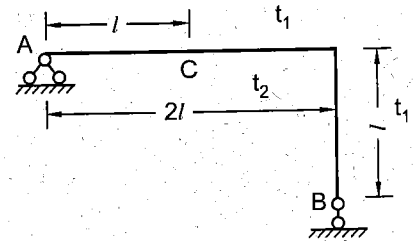


Hình 15-53

Nếu lấy $P_k = 1$ không thứ nguyên ta sẽ có :

$$\Delta_{km} = \sum_{i=1}^n \int_0^l \frac{\bar{\alpha}(t_2 - t_1)}{h} \bar{M}_k dz + \sum_{i=1}^n \int_0^l \bar{\alpha} \left[\frac{t_1 + t_2}{2} - t_0 \right] \bar{N}_k dz \quad (15-24)$$

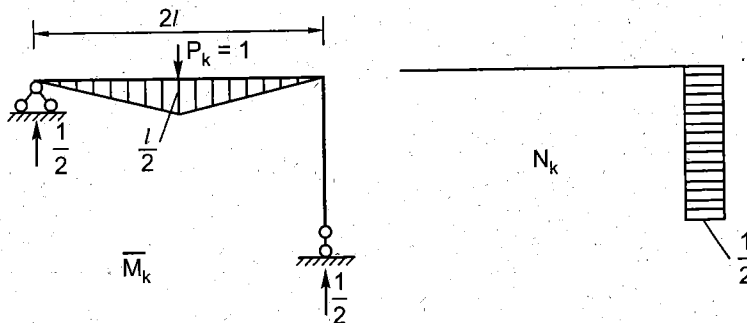
Ví dụ 9. Ta có khung gồm hai thanh như hình vẽ (h.15-54). Nhiệt độ ban đầu t_0 xem như bằng không. Sau đó ở phía bên ngoài khung nhiệt độ tăng lên t_1 và phía bên trong là t_2 . Chiều cao của mặt cắt ngang của thanh là h . Hệ số dẫn nở vì nhiệt là $\bar{\alpha}$. Hãy tính chuyển vị thẳng đứng tại C.



Bài giải

Hình 15-54

Các biểu đồ nội lực do P_k gây nên được vẽ như trên hình (h.15-55)



Hình 15-55

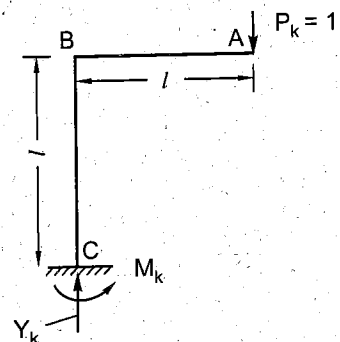
$$\Delta_{km} = y_C = \frac{l^2}{2h} \bar{\alpha}(t_2 - t_1) + \frac{1}{2} l \bar{\alpha} \left(\frac{t_1 + t_2}{2} \right)$$

§15-8. TÍNH CHUYỂN VỊ GÂY NÊN DO LIÊN KẾT CHUYỂN DỊCH

Liên kết ở đây có thể là nền đất chỗ đặt khung nhưng có thể là những kết cấu khác liên kết với khung đang xét.

Vấn đề đặt ra như sau : nền móng của khung hay kết cấu mang khung có một độ di chuyển nào đó đã biết. Hỏi ta phải tính được một chuyển vị nào đó của một mặt cắt của khung.

Xét trong bài toán phẳng, nền móng của khung chỉ có thể có ba chuyển vị : chuyển vị ngang, chuyển vị thẳng đứng hay chuyển vị quay. Ví dụ xét khung như hình vẽ (h.15-56).



Hình 15-56

Giả sử tại C vừa có độ lún Δ vừa có độ quay $\Delta\varphi$. Đòi hỏi tính chuyển vị thẳng đứng tại A. Bài toán không hề đụng đến nội lực do đó ta không cần xét đến nội lực. Ta tạo nên trạng thái "k" bằng cách đặt tại A một lực P_k thẳng đứng. Tại ngàm C sẽ có các phản lực R_k chống lại P_k như vậy khi ngàm có di động thì các phản lực R_k sẽ thực hiện được những công khả dĩ. Công đó phải cân bằng với công khả dĩ do P_k thực hiện trên chuyển vị Δ_{km} (chuyển vị do độ lún gây nên).

Cụ thể ở đây ta có :

$$P_k \cdot \Delta_{km} = M_k \cdot \Delta\varphi + Y_k \cdot \Delta$$

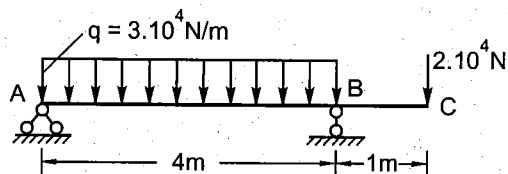
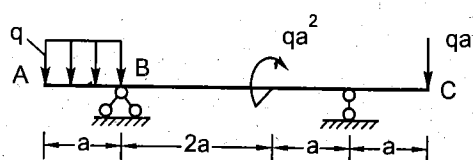
Nên lấy $P_k = 1$ (không thứ nguyên thì) ta có :

$$\Delta_{km} = \overline{M}_k \Delta\varphi + \overline{Y}_k \Delta \quad (15-25)$$

Nếu như trên hệ đã có sẵn một hệ tải trọng thì chúng ta tính chuyển vị riêng do tải trọng gây nên và chuyển vị chung là tổng cộng của hai chuyển vị.

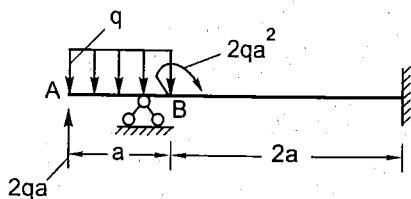
Bài tập

15.1. Xác định góc xoay tại B và độ võng tại C của các dầm chịu lực như hình vẽ. Cho biết $J = 3500\text{cm}^4$ và $E = 2.10^7 \text{ N/cm}^2$.

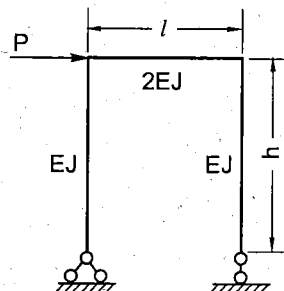


Hình 15-57

15.2. Xác định góc xoay tại A và độ võng tại B của công xon AC. Biết $q = 1.10^4 \text{ N/m}$; $a = 1\text{m}$; $J = 3000\text{cm}^4$, $E = 2.10^7 \text{ N/cm}^2$ (h.15-58).



Hình 15-58



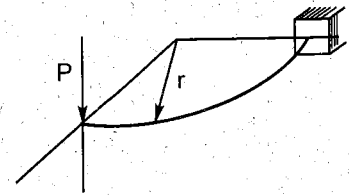
Hình 15-59

15.3. Tính chuyển vị ngang tại điểm đặt lực P và góc xoay tại gối tựa di động của khung vẽ trên h.15-59.

15.4. Thanh cong có hình dạng là $\frac{1}{4}$ đường tròn bán kính r .

Thanh được đặt nằm ngang và ngàm chặt một đầu, còn đầu tự do chịu một lực P thẳng đứng.

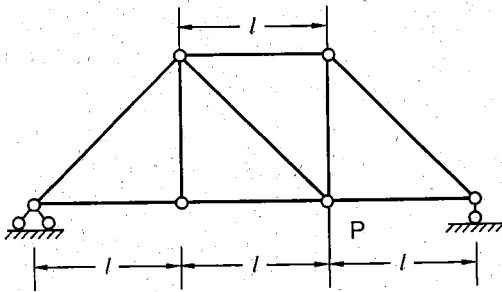
Cho biết mặt cắt ngang của thanh là hình tròn. Độ cứng khi uốn là EJ và độ cứng khi xoắn là GJ_p .



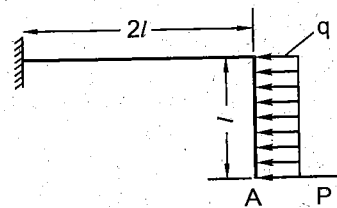
Hình 15-60

15.5. Cho dàn chịu lực như hình vẽ (h.15-61). Tính chuyển vị thẳng đứng tại điểm đặt lực theo định lý Castiglianô. Cho biết các thanh đều có độ cứng như nhau.

15.6. Tính chuyển vị ngang của khung chịu lực như hình vẽ tại A (bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt Q_y) theo định lý Castiglianô.

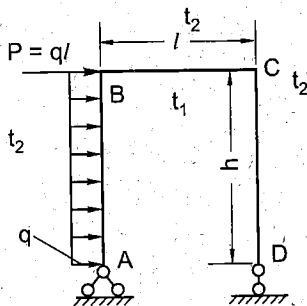


Hình 15-61

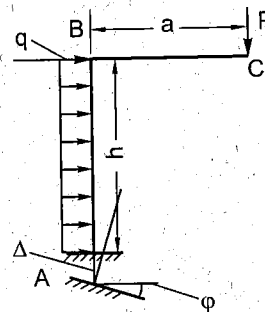


Hình 15-62

15.7. Tính chuyển vị ngang tại gối tựa di động của khung ABCD khi khung chịu tải trọng và nhiệt độ môi trường thay đổi như trên hình vẽ. Lấy nhiệt độ ban đầu $t_0 = 0$ và chiều cao của mặt cắt ngang là h (h.15-63).



Hình 15-63



Hình 15-64

15.8. Xác định độ võng và góc xoay tại đầu tự do của khung ABC khi ngàm bị lún xuống một đoạn Δ và xoay một góc φ trong quá trình khung chịu tải. (h.15-64).

Chương 16

GIẢI BÀI TOÁN SIÊU TĨNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP LỰC

§16-1. MỘT SỐ KHÁI NIỆM CƠ BẢN

Trong chương này ta chỉ xét bài toán phẳng. Giả sử hệ thanh là một hệ phẳng. Lực tác dụng cũng như chuyển vị của hệ chỉ xảy ra trong mặt phẳng của hệ. Nói một cách khác, ta xem như hệ chỉ có quyền di động trong mặt phẳng của hệ. Như vậy hệ có ba bậc tự do ; hai chuyển động tịnh tiến và một chuyển động quay trong mặt phẳng của hệ. Để cố định hệ ta cần ba liên kết đơn như đã nói trong chương VI. Số phương trình cân bằng tĩnh học là vừa đủ để xác định các phản lực trong các liên kết đó. Một bài toán như vậy được gọi là bài toán tĩnh định (h.16-1).

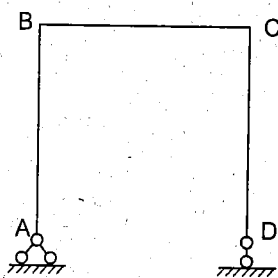
Nếu số liên kết nhiều hơn số liên kết cần thiết để giữ cho hệ cố định thì đó là một bài toán siêu tĩnh. Ví dụ với hệ trên hình 16-2. Để giữ cho hệ cố định ta chỉ cần có ngàm tại A. Liên kết đơn tại D làm tăng thêm độ cứng của hệ song để xác định các phản lực ta cần phải có bốn phương trình vì

có bốn phản lực là ẩn số, nghĩa là ngoài ba phương trình cân bằng tĩnh học ta phải tìm cách thiết lập thêm phương trình thứ tư. Không có cách nào khác là phải dựa vào điều kiện biến dạng và chuyển vị của hệ để thiết lập phương trình này.

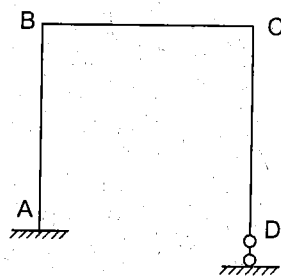
Số liên kết thêm sẽ là số bậc siêu tĩnh của hệ. Có bao nhiêu liên kết thêm thì phải có thêm bấy nhiêu phương trình để giải hệ. Ví dụ với hệ trên hình 16-3 số bậc siêu tĩnh là ba vì một ngàm tương đương với ba liên kết đơn :

Các liên kết ta vừa nói trên đây là các liên kết ngoại. Các liên kết đó nối hệ với trái đất hay với một hệ cố định nào khác.

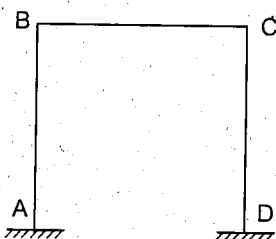
Tương tự ta có thể xét các liên kết giữa các phần đối với nhau trong cùng một hệ. Ví dụ xét hai hệ (A) và (B) trên hình 16-4.



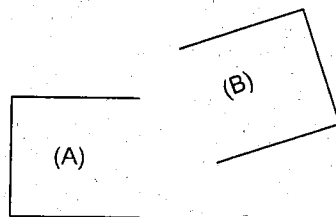
Hình 16-1



Hình 16-2

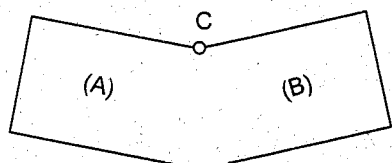


Hình 16-3

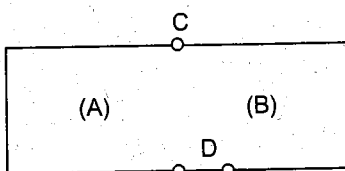


Hình 16-4

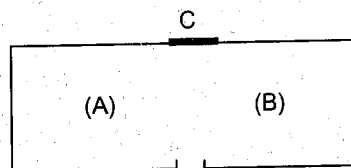
Xem (A) là cố định : (B) đối với (A) có ba bậc tự do. Nếu nối (B) với (A) bằng khớp C (h.16-5), khung (B) chỉ còn quay quanh C đối với (A). Vậy một khớp tương đương với hai liên kết đơn ; vì nó hạn chế hai bậc tự do của hệ. Để hạn chế nốt sự quay của (B) đối với (A) ta chỉ cần đặt thêm một liên kết đơn tại D (h.16-6) theo như hình vẽ.



Hình 16-5



Hình 16-6



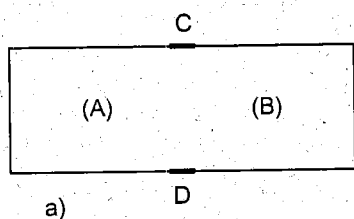
Hình 16-7

Vậy số liên kết cần thiết để gắn hệ này với hệ kia cũng là ba liên kết đơn (không cùng song song với nhau). Ta cũng có thể gắn khung (B) vào (A) bằng cách hàn cứng tại C (h.16-7). Như vậy một mối hàn cứng tương đương với ba liên kết đơn.

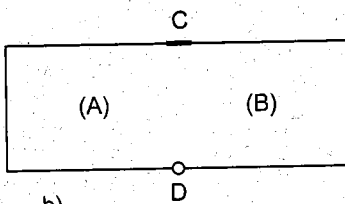
Nếu bây giờ ta hàn thêm một mối hàn tại D (h.16-8a) hay đặt thêm một khớp tại D (h.16-8b) hệ sẽ trở thành siêu tĩnh bậc ba hoặc bậc hai vì với các phương trình tĩnh học ta không thể xác định được các thành phần nội lực trong khung.

Đây là các liên kết giữa các thành phần của một hệ nên được gọi là siêu tĩnh nội.

Chú ý : Như vậy một chu vi khép kín (h.16-8a) có ba bậc siêu tĩnh. Nếu trong chu vi đó ta đặt một khớp đơn nối hai thanh (h.16-8b) thì bậc siêu tĩnh giảm đi một. Nếu đặt ba khớp đơn (h.16-6) thì giảm hết bậc siêu tĩnh (3 khớp đơn không thẳng hàng).

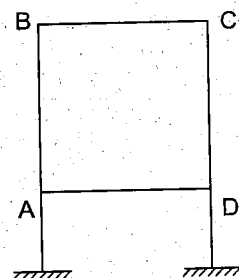


a)



b)

Hình 16-8



Hình 16-9

Một hệ siêu tĩnh có thể vừa có siêu tĩnh nội vừa có siêu tĩnh ngoại (h.16-9).

Bậc siêu tĩnh của hệ là bằng tổng bậc siêu tĩnh nội và siêu tĩnh ngoại.

§16-2. TÍNH HỆ THANH SIÊU TĨNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP LỰC

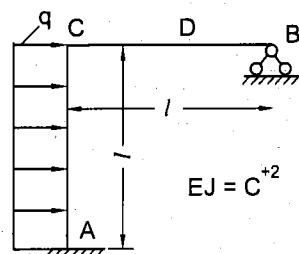
Giả sử ta có hệ siêu tĩnh chịu lực như trên hình 16-10, đòi hỏi ta phải xác định các thành phần nội lực của khung hay tính chuyển vị của khung tại một nơi nào đó. Cách giải quyết bài toán là xây dựng một hệ tĩnh định tương đương nghĩa là một hệ tĩnh định mà cách

biến dạng, cách làm việc hoàn toàn giống như hệ siêu tĩnh. Khi đó để xác định nội lực hay tính chuyển vị của hệ siêu tĩnh thì ta tính nội lực và chuyển vị trên hệ tĩnh định tương đương.

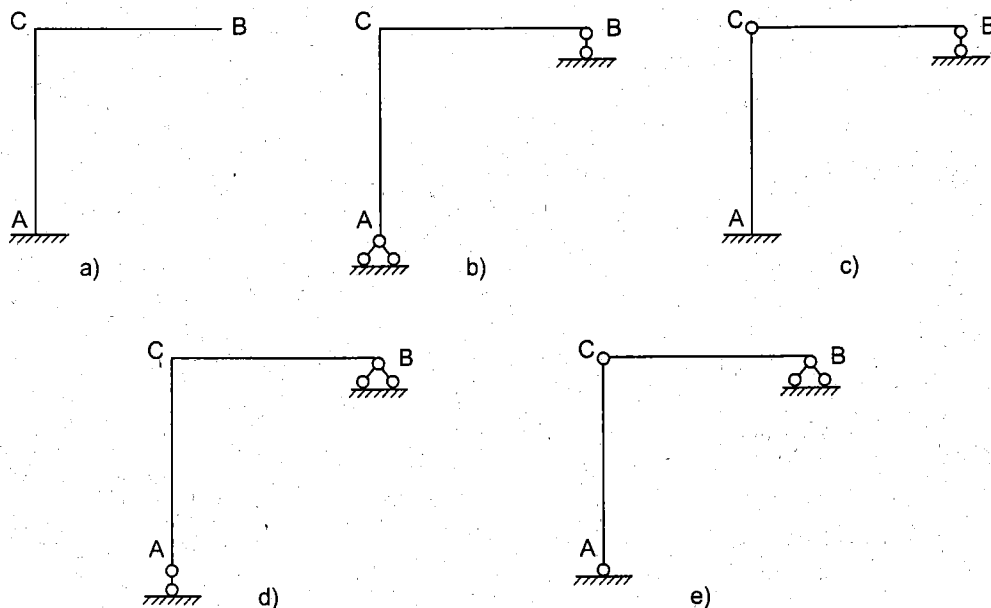
Mục đích của chúng ta là xây dựng một hệ tĩnh định tương đương. Để xây dựng được một hệ tĩnh định tương đương ta thực hiện các bước sau đây :

a) Chọn một hệ cơ bản

Một hệ cơ bản là một hệ tĩnh định suy ra từ hệ siêu tĩnh bằng cách bỏ bớt liên kết. Ví dụ với hệ siêu tĩnh đã cho (h.16-10) ta có thể chọn một trong các hệ cơ bản như trên hình 16-11.



Hình 16-10



Hình 16-11

Hệ a : ta đã bỏ hai liên kết tại B ;

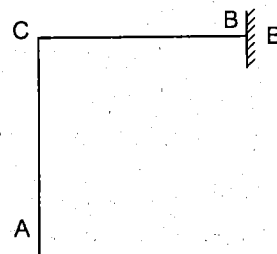
Hệ b : ta đã bỏ một liên kết tại A và một liên kết tại B ;

Hệ c : ta đã bỏ một liên kết nội tại C và một liên kết ngoại tại B ;

Hệ d : ta đã bỏ hai liên kết tại A ;

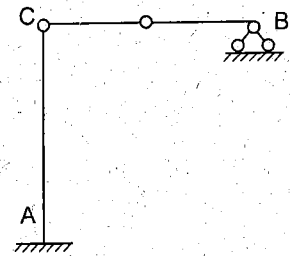
Hệ e : ta đã bỏ hai liên kết nội tại A và C.

Chú ý : Ta chỉ có quyền bỏ bớt liên kết chứ không được thêm vào. Ví dụ với hệ trên hình 16-12 không phải là hệ cơ bản của hệ siêu tĩnh đã cho vì tại B ta đã thêm vào một liên kết.



Hình 16-12

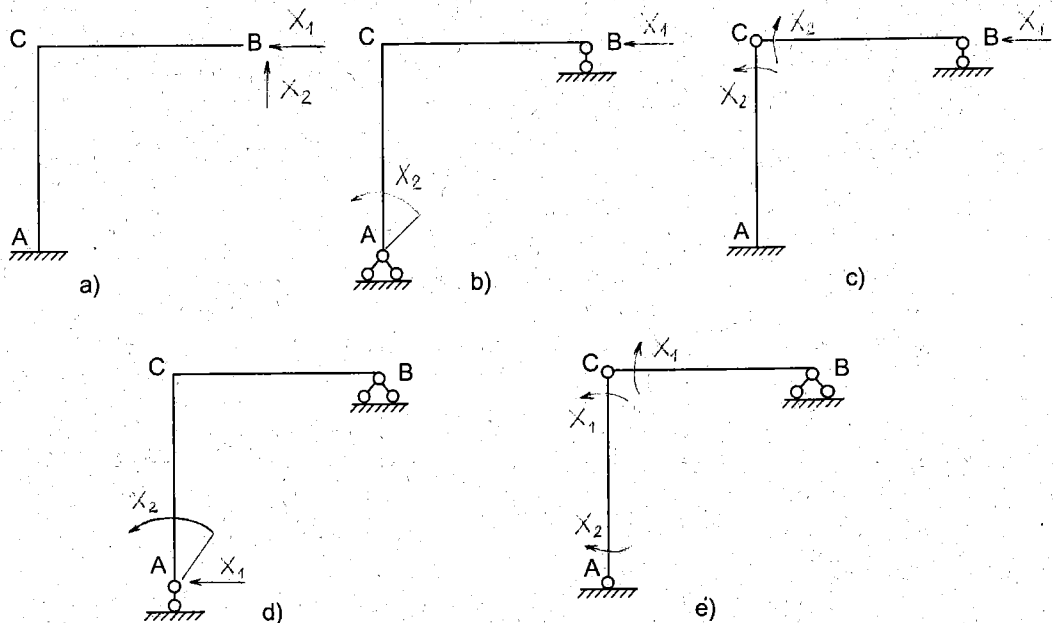
Dĩ nhiên khi bỏ bớt các liên kết ta phải tránh để cho hệ trở thành một hệ biến hình hoặc biến hình tức thời. Ví dụ hệ trên hình 16-13 ta đã bỏ hai liên kết nội trên đường CB và như vậy ta có một hệ có ba khớp thẳng hàng, hệ đó là một hệ biến hình tức thời và không thể trở thành một hệ cơ bản được.



Hình 16-13

b) Đặt các phản lực liên kết vào hệ cơ bản

Đặt các lực liên kết vào những nơi liên kết đã bị bỏ đi (h.16-14)



Hình 16-14

Hệ a : Liên kết B tạo nên hai thành phần phản lực theo hai phương. Do đó khi bỏ liên kết ta phải đặt vào các phản lực theo hai phương để thay thế.

Hệ b : Ta đã thay ngàm A bằng một gối tựa cố định, vậy ta phải thêm một mômen để liên kết tương đương với ngàm A. Tại B phải đặt thêm một thành phần phản lực ngang để tương đương khớp cố định B.

Hệ c : Tại C khi thay khớp vào có nghĩa là ta đã bỏ thành phần mômen uốn liên kết giữa các thanh, vì vậy để tương đương như cũ ta phải đặt các mômen đó hai bên khớp C. Tại B phải đặt thêm một thành phần phản lực ngang.

Hệ d : Tại A phải đặt thêm một mômen và một phản lực ngang thì liên kết đó mới tương đương liên kết ngàm tại A.

Hệ e : Ta phải đặt các mômen liên kết X_1 và X_2 ở A và C.

c) *Thiết lập phương trình chính tắc để xác định các phản lực liên kết*

Đặt tải trọng lên hệ cơ bản đã chọn. Trị số của các phản lực liên kết được xác định từ điều kiện chuyển vị do tải trọng và do các phản lực liên kết gây nên theo các phương của phản lực liên kết phải bằng điều kiện chuyển vị thực của hệ siêu tĩnh. Ví dụ chọn hệ cơ bản a—đặt tải trọng lên hệ cơ bản đó (h.16–15). Như vậy tải trọng và các phản lực X_1 , X_2 sẽ gây nên các chuyển vị theo phương thẳng đứng và phương ngang của B. Để hệ tương đương với hệ siêu tĩnh thì ta phải xác định được trị số của X_1 , X_2 sao cho các chuyển vị đó là bằng không. (Gối tựa cố định tại B của hệ siêu tĩnh không cho phép khung có các chuyển vị theo phương ngang và phương thẳng đứng).

Sau khi đã xác định được trị số của X_1 , X_2 thì ta đã có một hệ tĩnh định tương đương và bài toán được xem như là đã giải xong.

Gọi δ_{11} , δ_{12} , δ_{21} , δ_{22} là các chuyển vị đơn vị theo các phương X_1 và X_2 do các lực đơn vị gây ra. Như vậy chuyển vị theo các phương X_1 , X_2 do các lực X_1 , X_2 và tải trọng gây nên được tính với các biểu thức :

$$\Delta_1 = \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p}$$

$$\Delta_2 = \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p}$$

Từ điều kiện $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$ ta có hệ phương trình chính tắc :

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} = 0 \end{cases}$$

Từ hệ phương trình đó ta dễ dàng xác định được X_1 và X_2 . Một cách tổng quát ta kí hiệu δ_{ij} là chuyển vị theo phương i do lực đơn vị theo phương j gây nên.

Tất cả những điều ta vừa nói trên đây có thể suy rộng cho một hệ siêu tĩnh bậc n . Khi đó hệ phương trình chính tắc sẽ có dạng :

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1p} = 0$$

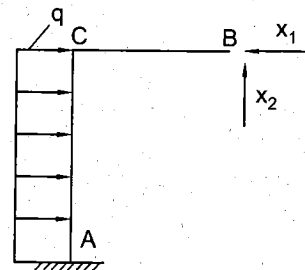
$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{2n}X_n + \Delta_{2p} = 0$$

.....

$$\delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{np} = 0$$

Các hệ số δ_{ii} được gọi là hệ số chính. Các hệ số δ_{ij} được gọi là hệ số phụ và Δ_{ip} gọi là các số hạng tự do.

Phương pháp giải hệ siêu tĩnh như ta vừa trình bày, các ẩn số là các phản lực liên kết nên được gọi là phương pháp lực.

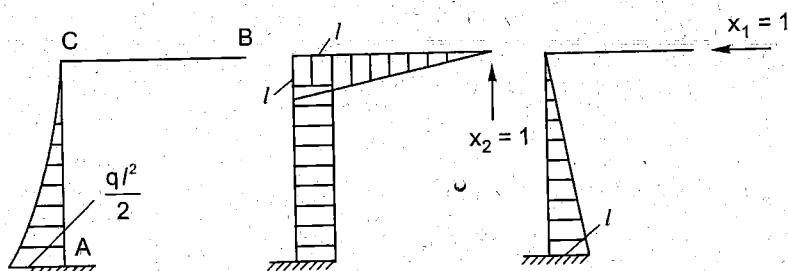


Hình 16-15

Ví dụ 1. Vẽ biểu đồ nội lực của hệ siêu tĩnh đã cho trên hình 16–10.

Bài giải

Để xác định được hệ số phụ và các số hạng tự do ta tiến hành vẽ các biểu đồ nội lực do các đơn vị và do tải trọng gây nên trên hệ cơ bản đã chọn. Với khung chịu lực, biến dạng chủ yếu là do mômen uốn cho nên ta bỏ qua lực dọc và lực cắt. Nghĩa là ta chỉ cần vẽ các biểu đồ mômen uốn. Sự gần đúng này sẽ thực hiện cho mọi phép toán đối với khung trong các ví dụ tiếp theo. Các biểu đồ nội lực được biểu diễn trên hình 16–16.



Hình 16–16

Từ đó ta có :

$$\delta_{22} = \sum \int \frac{\bar{M}_2 \bar{M}_2 ds}{EJ} = \left(\frac{l \cdot l}{2} \cdot \frac{2}{3} l + l \cdot l \cdot l \right) \frac{1}{EJ} = \frac{4}{3} \frac{l^3}{EJ}$$

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_1 ds}{EJ} = \frac{l \cdot l}{2} \cdot \frac{2}{3} l \frac{1}{EJ} = \frac{l^3}{3EJ}$$

$$\delta_{21} = \delta_{12} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_2 ds}{EJ} = \frac{l \cdot l}{2} l \frac{1}{EJ} = \frac{l^3}{2EJ}$$

$$\Delta_{1p} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 M_p ds}{EJ} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{q l^2}{2} \cdot l \frac{3}{4} l \frac{1}{EJ} = -\frac{q l^4}{8EJ}$$

$$\Delta_{2p} = \sum \int \frac{\bar{M}_2 M_p ds}{EJ} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{q l^2}{2} \cdot l \cdot l \frac{1}{EJ} = -\frac{q l^4}{6EJ}$$

Như vậy một cách tổng quát ta có :

$$\delta_{ij} = \sum \int \frac{\bar{M}_i \bar{M}_j ds}{EJ} \quad (16-1)$$

$$\Delta_{ip} = \sum \int \frac{\bar{M}_i M_p ds}{EJ}$$

trong đó $\bar{M}_i$ và $\bar{M}_j$ là các biểu đồ mômen đơn vị và M_p là biểu đồ do tải trọng gây nên trên hệ cơ bản.

Từ đó ta có hệ phương trình chính tắc :

$$\begin{cases} \frac{X_1}{3} + \frac{X_2}{2} - \frac{ql}{8} = 0 \\ \frac{X_1}{2} + \frac{4}{3}X_2 - \frac{ql}{6} = 0 \end{cases}$$

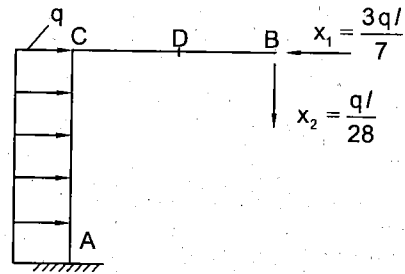
Giải hệ phương trình đó ta được :

$$X_1 = \frac{3ql}{7} ; X_2 = -\frac{ql}{28}$$

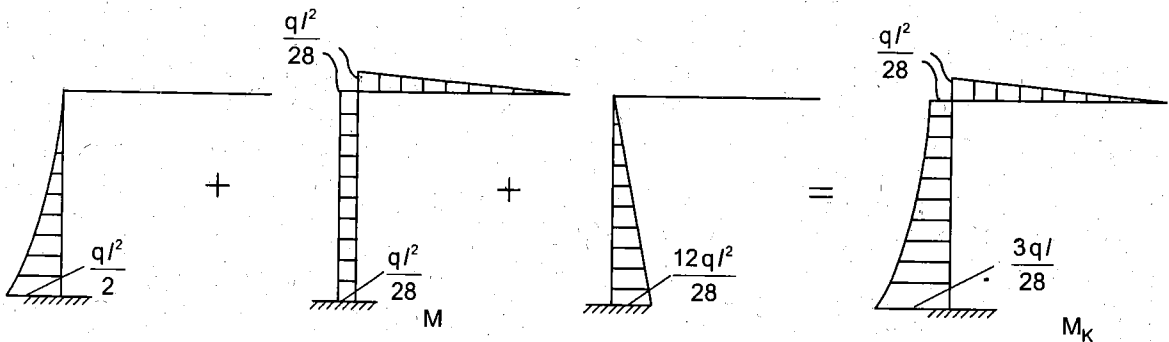
Dấu âm của X_2 chỉ rằng chiều thực của phản lực ngược với chiều đã chọn.

Đặt các lực X_1 và X_2 cùng với tải trọng lên hệ cơ bản ta được hệ tĩnh định tương đương (h.16-17).

Biểu đồ nội lực của hệ tĩnh định tương đương đó cũng là biểu đồ của hệ siêu tĩnh. Riêng với biểu đồ mômen uốn ta có thể làm phép cộng như sau : Nhân trị số X_1 và X_2 vào các biểu đồ $\bar{M}_1$ và $\bar{M}_2$ xong cộng với M_p ta sẽ được biểu đồ mômen uốn của hệ (h.16-18).



Hình 16-17



Hình 16-18

Ví dụ 2. Tìm chuyển vị thẳng đứng tại D điểm giữa của thanh CB của hệ siêu tĩnh (h.16-10).

Bài giải

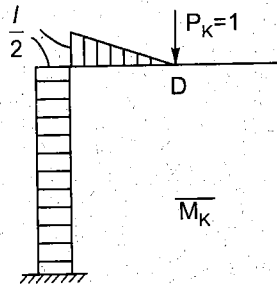
Giải bài toán trên hệ tĩnh định tương đương (h.16-17). Ta tạo nên trạng thái "k" bằng cách bỏ tất cả ngoại lực lên hệ và đặt lực $P_k = 1$ theo phương thẳng đứng (h.16-19). Chuyển vị thẳng đứng tại D sẽ được tính với biểu thức :

$$\Delta_{km} = y_D = \sum \int \frac{\bar{M}_k M_m ds}{EJ}$$

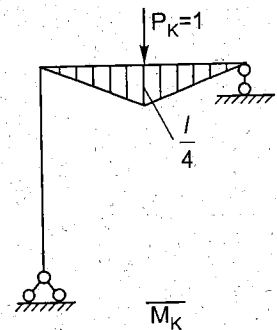
Ta thấy ngay phép nhân Verèsaghin giữa các biểu đồ ở hình 16–18 và hình 16–19 không đơn giản. Ta có thể làm một cách khác như sau :

Ta biết rằng dù ta chọn bất cứ một hệ cơ bản nào thì cuối cùng biểu đồ mômen M_x (h.16–18) cũng phải như nhau vì với bất cứ các hệ tĩnh định tương đương xây dựng trên hệ cơ bản nào thì hệ đó cũng phải làm việc như hệ siêu tĩnh.

Vậy ta không nhất thiết phải xây dựng trạng thái "k" trên hệ cơ bản đã chọn. Ta có thể xây dựng trạng thái "k" trên hệ cơ bản khác sao cho phép nhân đơn giản nhất. Ví dụ ta sẽ chọn hệ cơ bản b) hay c) để xây dựng trạng thái "k" khi tìm chuyển vị thẳng đứng tại D.



Hình 16–19



Hình 16–20

Phép nhân Verèsaghin giữa các biểu đồ mômen M_k (h.16–20) và M_x (h.16–18) sẽ rất dễ dàng như sau :

$$\Delta_{km} = y_D = \sum \int \frac{\bar{M}_k M_m ds}{EJ}$$

$$y_D = -\frac{1}{2} \cdot \frac{l}{4} \cdot l \cdot \frac{ql^2}{28.2} \cdot \frac{1}{EJ_x} = -\frac{ql^4}{448EJ_x} ;$$

$$y_D = -\frac{ql^4}{448EJ_x}$$

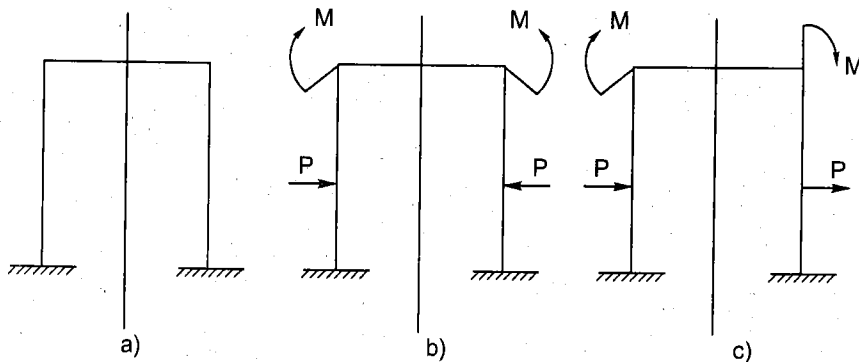
Dấu trừ có nghĩa là chuyển vị ngược với chiều của P_k .

§16-3. SỬ DỤNG TÍNH CHẤT ĐỐI XỨNG CỦA HỆ

Từ một hệ siêu tĩnh ta có thể có nhiều hệ cơ bản, trong số các hệ cơ bản đó, ta có thể chọn được một hệ cơ bản hợp lý nhất nghĩa là đối với hệ cơ bản đó nhiều hệ số phụ và số hạng tự do triệt tiêu nhất. Trong mục này ta đề cập đến cách chọn hệ cơ bản khi hệ có tính chất đối xứng.

Ta gọi một hệ siêu tĩnh phẳng là một hệ đối xứng khi hệ có một trục đối xứng. Một hệ đối xứng chịu tải trọng đối xứng là khi tải trọng đặt lên một phần nào đó của khung là ảnh của tải trọng đặt lên phần kia qua gương phẳng đặt vuông góc với mặt phẳng của khung và đi qua trục đối xứng của hệ. Ngược lại, nếu tải trọng của phần này là ảnh của phần kia nhưng có chiều ngược lại thì ta gọi là hệ đối xứng chịu tải trọng phản đối xứng. Ví dụ khung siêu tĩnh (h.16–21a) là một hệ đối xứng.

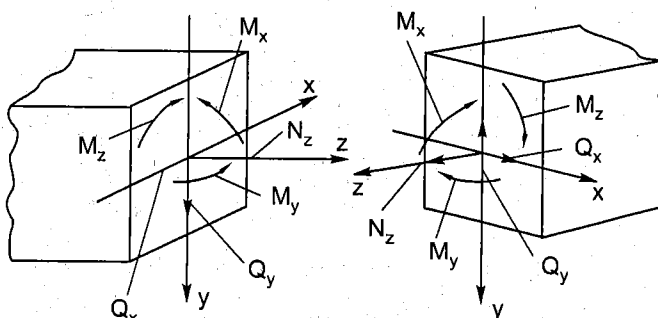
Nếu hệ chịu tải trọng như trên hình (h.16–21b) là hệ chịu tải trọng đối xứng và như trên hình (h.16–21c) là hệ chịu tải trọng phản đối xứng.



Hình 16-21

Tương tự, nếu ta xét các thành phần nội lực trên mặt cắt ngang nào đó thì ta cũng có thể chia các thành phần nội lực thành các thành phần đối xứng và phản đối xứng.

Lực dọc, mômen uốn M_x , M_y là các thành phần nội lực đối xứng (h.16-22). Lực cắt và mômen xoắn là các thành phần nội lực phản đối xứng.



Hình 16-22

Ta dễ dàng chứng minh được mệnh đề sau đây :

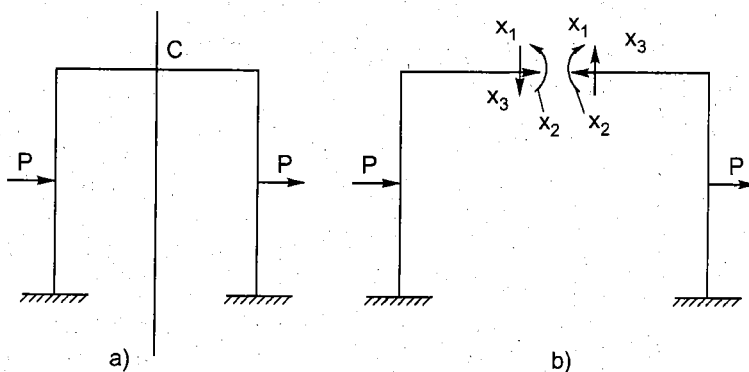
Nếu một hệ đối xứng chịu tác dụng của tải trọng đối xứng thì nội lực phản đối xứng trên mặt cắt trong mặt phẳng đối xứng của hệ là bằng không. Ngược lại nếu tải trọng là phản đối xứng thì nội lực đối xứng phải bằng không.

Để chứng minh mệnh đề đó chúng ta chú ý các nhận xét sau đây :

– Khi hệ là đối xứng chịu tải trọng đối xứng thì biểu đồ mômen là đối xứng. Ngược lại khi hệ là đối xứng, tải trọng phản đối xứng thì biểu đồ mômen là phản đối xứng.

– Phép nhân Verésaghin giữa biểu đồ đối xứng và phản đối xứng là bằng không.

Giả sử ta có hệ siêu tĩnh chịu lực phản đối xứng như trên hình 16-23a. Ta chọn hệ cơ bản này bằng cách cắt đôi khung như hình 16-23b. Ta sẽ chứng minh rằng các thành phần nội lực : đối xứng X_1 và X_2 (lực dọc và mômen uốn) trên mặt cắt đối xứng C là bằng không.



Hình 16-23

Thực vậy, từ điều kiện chuyển vị tương đối giữa hai mặt cắt bằng không ta có hệ phương trình chính tắc :

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1p} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2p} = 0 \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3p} = 0 \end{cases}$$

biểu đồ mômen đơn vị $\overline{M}_1$ và $\overline{M}_2$ là đối xứng, còn $\overline{M}_3$ là phản đối xứng.

Biểu đồ mômen do tải trọng gây nên là phản đối xứng. Vì vậy ta có :

$$\delta_{13} = \delta_{23} = \delta_{31} = \delta_{32} = \Delta_{1p} = \Delta_{2p} = 0$$

Hệ phương trình chính tắc được rút gọn lại như sau :

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 = 0 \\ \delta_{33}X_3 + \Delta_{3p} = 0 \end{cases}$$

Vì các hệ số δ_{11} , δ_{22} , δ_{12} là khác không nên từ hai phương trình từ đầu ta có thể kết luận rằng X_1 và X_2 là bằng không.

Ngược lại, giả sử khung chịu lực đối xứng khi đó ta có :

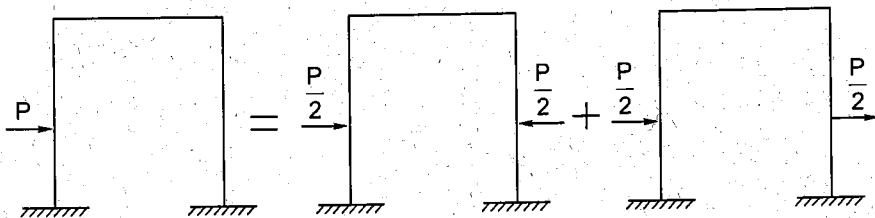
$$\delta_{13} = \delta_{23} = \delta_{31} = \delta_{32} = \Delta_{3p} = 0$$

Hệ phương trình chính tắc sẽ được rút gọn như sau :

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} = 0 \\ \delta_{33}X_3 = 0 \end{cases}$$

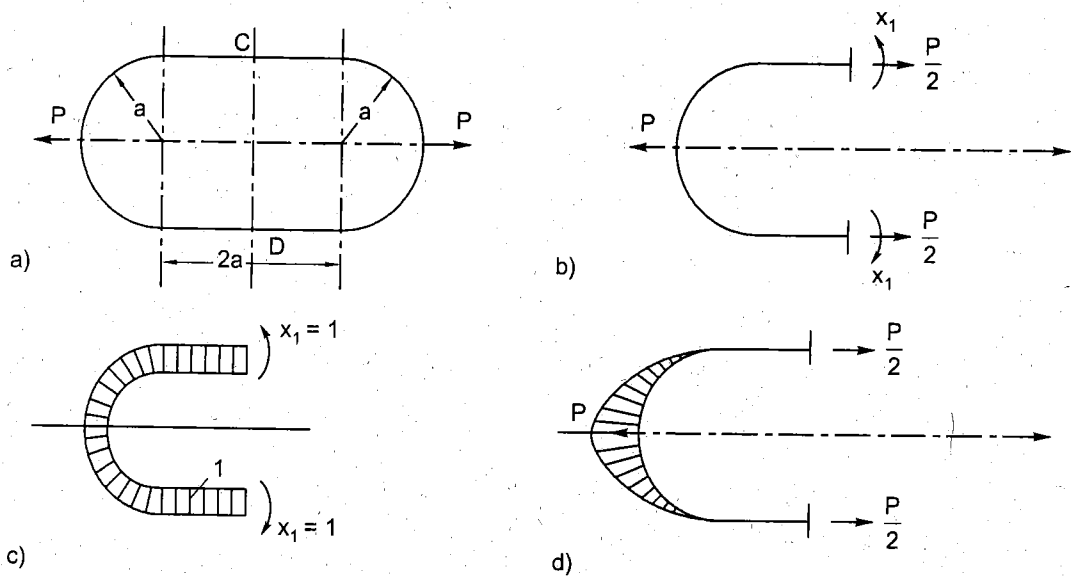
Từ phương trình thứ ba ta có $X_3 = 0$. Vậy mệnh đề đã được chứng minh.

Trường hợp hệ là đối xứng nhưng tải trọng là bất kì thì ta có thể giải bài toán bằng cách xem hệ như tổng tác dụng của một hệ tải trọng đối xứng và hệ tải trọng phản đối xứng (h.16-24).



Hình 16-24

Ví dụ 3. Vẽ biểu đồ mômen của khung siêu tĩnh chịu lực như hình 16–25a.



Hình 16–25

Bài giải

Khung có trục đối xứng CD và chịu tác dụng của tải trọng đối xứng nên thành phần lực cắt trên mặt cắt qua trục CD phải bằng không.

Ta cắt đôi khung và xét một nửa khung (h.16 – 26b) vì tính chất đối xứng nên mômen uốn và lực dọc trên của mặt cắt ở các điểm của D và C phải bằng nhau. Từ điều kiện cân bằng ta có :

$$N_1 = N_2 = \frac{P}{2}$$

Vậy ta chỉ còn phải tìm trị số mômen uốn X_1 . Từ điều kiện chuyển vị tương đối giữa các mặt cắt tại C và D phải bằng không ta thiết lập được phương trình chính tắc :

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0$$

Biểu đồ đơn vị $\bar{M}_1$ và tải trọng M_p được biểu diễn như trên hình 16–25c, d.

Hệ số phụ và số hạng tự do được tính như sau :

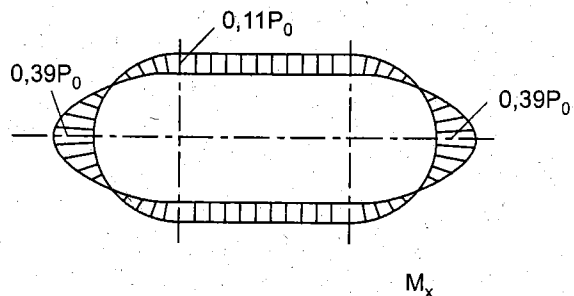
$$\delta_{11} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_1 ds}{EJ} = \frac{2a}{EJ} \left(1 + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\Delta_{1P} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 M_p ds}{EJ} = -\frac{Pa^2}{EJ} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right)$$

Vậy ta có :

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = 0,11Pa$$

Biểu đồ mômen uốn của hệ được biểu diễn như trên hình 16–26.



Hình 16–26

§16-4. DẦM LIÊN TỤC

Dầm liên tục là một dầm được đặt trên nhiều gối tựa tạo nên nhiều nhịp (h.16-27). Đây là bài toán siêu tĩnh. Bậc siêu tĩnh là số liên kết đơn thêm vào, nghĩa là bằng số nhịp của dầm trừ đi một.

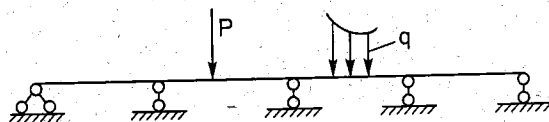
Hệ cơ bản hợp lí là đặt các khớp trên mỗi gối tựa để chia dầm thành nhiều dầm đơn (h.16-28). Như vậy lực đặt trên một nhịp nào đó sẽ không ảnh hưởng đến các nhịp bên cạnh. Các phản lực liên kết ở đây là các mômen. Điều kiện để hệ trở thành hệ tĩnh định tương đương là góc xoay tương đối giữa hai mặt cắt hai phía của khớp là bằng không (vì dầm liên tục là một thanh liên nên tại đó các mặt cắt không có góc xoay tương đối với nhau). Hệ phương trình chính tắc được thiết lập từ điều kiện đó.

Chúng ta nhận xét góc xoay tương đối giữa hai mặt cắt về hai phía của khớp chỉ do các lực đặt trên hai nhịp kế cận gây nên vì vậy để tính chuyển vị tương đối của gối tựa thứ n thì ta chỉ cần xét tải trọng đặt trên hai nhịp từ gối tựa $n-1$ đến $n+1$ (h.16-24). Để tiện cho các kí hiệu sau này ta sẽ gọi :

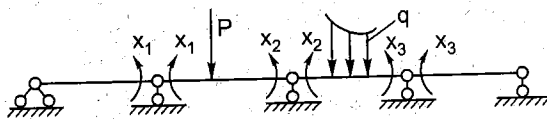
$X_{n-1} = M_{n-1}$; $X_n = M_n$; $X_{n+1} = M_{n+1}$
và giả thiết trên hai nhịp đang xét có các tải trọng phân bố q nào đó. Phương trình chính tắc sẽ có dạng như sau :

$$\Delta_n = \delta_{n(n-1)}M_{(n-1)} + \delta_{nn}M_n + \delta_{n(n+1)}M_{(n+1)} + \Delta_{np} = 0 \quad (a)$$

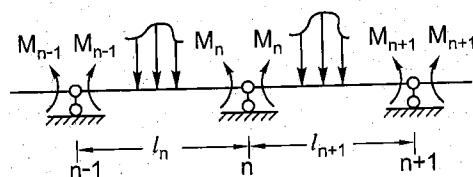
Các biểu đồ mômen đơn vị và biểu đồ mômen do tải trọng gây nên trên hai nhịp đang xét được biểu diễn trên hình 16-30.



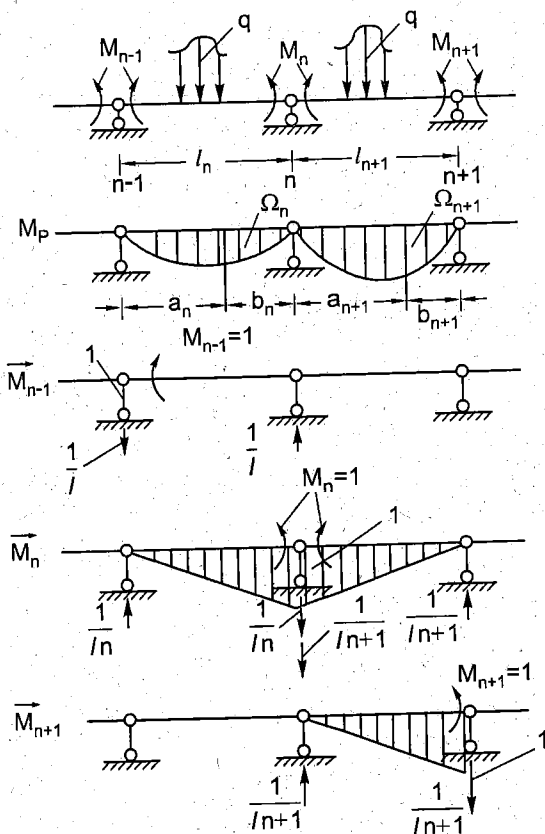
Hình 16-27



Hình 16-28



Hình 16-29



Hình 16-30

Nếu độ chống uốn EJ không đổi trên suốt chiều dài của dầm thì với phép nhân biểu đồ Vêrêsgahin, ta có trị số các hệ số phụ và các số hạng tự do như sau :

$$\delta_{n(n-1)} = \int_0^{l_n} \frac{\bar{M}_{n-1} \bar{M}_n ds}{EJ_x} = \frac{1}{2} l_n \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{EJ_x} = \frac{l_n}{6EJ_x}$$

$$\delta_{nn} = \sum_{i=n}^{(n+1)} \int_0^{l_{n+1}} \frac{\bar{M}_n^2 ds}{EJ_x} = \frac{l_n}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{EJ_x} + \frac{l_{n+1}}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{EJ_x} = \frac{l_n}{3EJ_x}$$

$$\delta_{n(n+1)} = \int_0^{l_{n+1}} \frac{\bar{M}_n \bar{M}_{n+1} ds}{EJ_x} = \frac{1}{2} l_{n+1} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{EJ_x} = \frac{l_{n+1}}{6EJ_x}$$

$$\Delta_{np} = \sum_{i=n}^{(n+1)} \int_0^{l_{n+1}} \frac{\bar{M}_n M_p ds}{EJ_x} \left(\frac{\Omega_n a_n}{l_n} + \frac{\Omega_{(n+1)} b_{(n+1)}}{l_{(n+1)}} \right) \frac{l}{EJ_x}$$

trong đó l_n và $l_{(n+1)}$ là độ dài của nhịp thứ n và $(n+1)$; $\Omega_n \Omega_{(n+1)}$ là diện tích của biểu đồ mômen do tải trọng gây nên trên hai nhịp thứ n và $(n+1)$; a_n và $b_{(n+1)}$ là khoảng cách từ trọng tâm của các diện tích đó đến gối tựa thứ $(n-1)$ và $(n+1)$ (h.16-30).

Đem thay các trị số đó vào phương trình (a) và ước lược cho EJ_x ta có :

$$l_n M_{(n-1)} + 2(l_n + l_{(n+1)}) M_n + l_{(n+1)} M_{(n+1)} + 6 \left(\frac{\Omega_n a_n}{l_n} + \frac{\Omega_{(n+1)} b_{(n+1)}}{l_{(n+1)}} \right) = 0$$

Phương trình đó được gọi là phương trình ba mômen vì các ẩn số là ba mômen tại các gối tựa liên tiếp.

Với mỗi gối tựa ta thiết lập được một phương trình, ba mômen và cùng cách như vậy ta thiết lập được tất các phương trình của hệ chính tắc.

Ghi chú : Ω_n và $\Omega_{(n+1)}$ được xem là dương khi biểu đồ mômen do tải trọng gây nên là căng phía dưới.

Ví dụ 4. Vẽ biểu đồ mômen uốn của dầm liên tục chịu lực như hình 16-31.

Bài giải

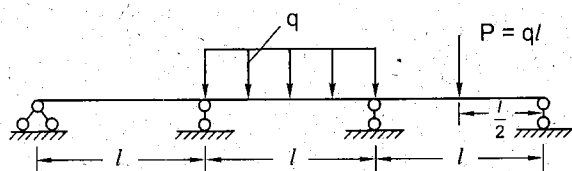
Biểu đồ mômen uốn M_p của tải trọng đặt trên hệ cơ bản được biểu diễn trên hình 16-32. Đánh số thứ tự của các gối tựa như hình vẽ.

Chú ý : $M_0 = M_3 = 0$. Ta có các phương trình chính tắc như sau :

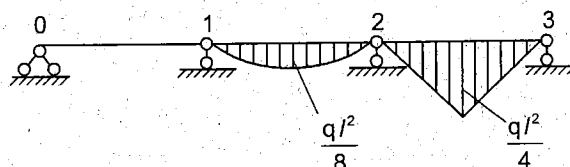
$$\begin{cases} lM_0 + 2(l+l)M_1 + lM_2 + 6\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{l}{2}\right) = 0 \\ lM_1 + 2(l+l)M_2 + lM_3 + 6\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{l}{2} + \frac{ql^2}{4} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

Hay

$$\begin{cases} 4M_1 + M_2 + \frac{ql^2}{4} = 0 \\ M_1 + 4M_2 + \frac{5ql^2}{8} = 0 \end{cases}$$



Hình 16-31



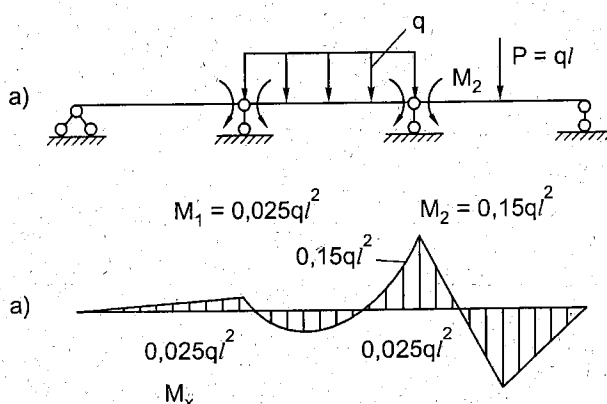
Hình 16-32

Giải hệ phương trình đó ta được :

$$M_1 = -\frac{ql^2}{40} = -0,025 ql^2$$

$$M_2 = -\frac{3ql^2}{20} = -0,15 ql^2$$

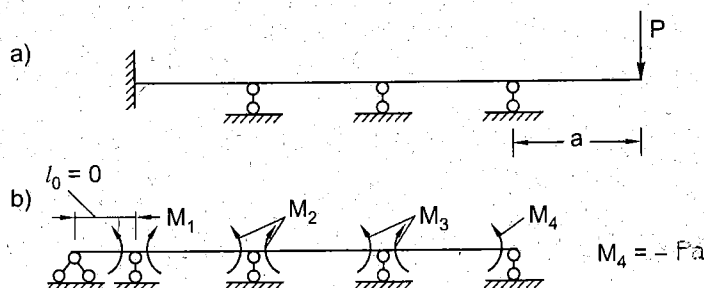
Vậy ta có hệ tĩnh định tương đương như hình 16-33a và biểu đồ mômen uốn được biểu diễn trên hình 16-33b.



Hình 16-33

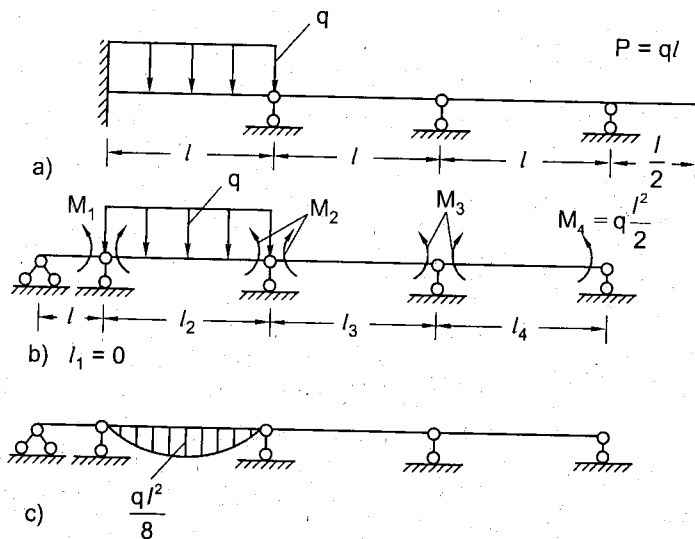
Trường hợp dầm liên tục có đầu thừa và đầu ngàm (h.16-34a) thì để sử dụng được phương trình

ba mômen ta biến hệ như trên hình 16-34b. Mômen uốn thu gọn có thể xem là mômen liên kết của mặt cắt tại gối tựa cuối cùng. Mômen đó sẽ có trị số dương khi ngoại lực đặt lên đầu thừa làm căng thớ dưới và nó sẽ có trị số âm khi ngoại lực làm căng thớ trên. Ta cũng có thể xem là ngoại lực tác động lên nhịp cuối của dầm. Liên kết ngàm được thay bằng một nhịp với chiều dài của nhịp là bằng không.



Hình 16-34

Ví dụ 5. Vẽ biểu đồ mômen uốn của dầm liên tục chịu lực như hình 16–35a.



Hình 16–35

Bài giải

Ta có hệ cơ bản như trên hình 16–35b. Biểu đồ M_p được biểu diễn trên hình (h.16–35c).

Mômen M_4 có trị số là $-\frac{ql^2}{2}$.

Hệ phương trình chính tắc được viết như sau :

$$\begin{cases} l_1 M_0 + 2(l_1 + l)M_1 + lM_2 + 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{ql^2}{8} \cdot l \cdot \frac{1}{2} = 0 \\ lM_1 + 2(l + l)M_2 + lM_3 + 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{1}{2} = 0 \\ lM_2 + 2(l + l)M_3 + lM_4 = 0 \end{cases}$$

Rút gọn lại, với chú ý $l_1 = 0$ và $M_4 = -\frac{ql^2}{2}$, ta có :

$$\begin{cases} 2M_1 + M_2 + \frac{ql^2}{4} = 0 \\ M_1 + 4M_2 + M_3 + \frac{ql^2}{4} = 0 \\ M_2 + 4M_3 - \frac{ql^2}{4} = 0 \end{cases}$$

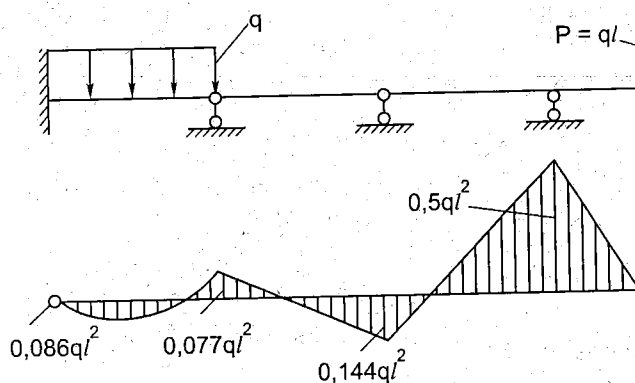
Giải hệ thống phương trình đó ta được :

$$M_1 = -0,0865ql^2 ;$$

$$M_2 = -0,0769ql^2 ;$$

$$M_3 = 0,144ql^2 .$$

Biểu đồ mômen được biểu diễn như trên hình 16-36.



Hình 16-36

§16-5. CÁC BÀI TOÁN SIÊU TĨNH TRONG TRƯỜNG HỢP CHỊU LỰC ĐƠN GIẢN CỦA THANH

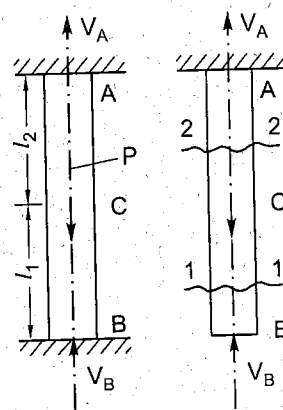
1. Trường hợp thanh chịu kéo nén đúng tâm

Ví dụ 6. Ta hãy xét trường hợp thanh chịu lực như hình 16-37. Xác định ứng suất trên các mặt cắt ngang của thanh.

Bài giải

Dưới tác dụng của lực P, tại các ngàm ở hai đầu A và B phát sinh các phản lực V_A và V_B . Để có thể xác định được nội lực trong thanh ta đưa sang hệ tĩnh định tương đương bằng cách bỏ đi một đầu ngàm tại B. Phản lực V_B được xác định từ điều kiện độ giãn toàn phần của thanh do P và V_B gây nên là bằng không vì ngàm tại B không cho phép thanh có độ giãn dài.

$$\delta_{11} V_B + \Delta_{1P} = 0$$



Hình 16-37

trong đó : $\delta_{11} = -\frac{l_1 + l_2}{EF}$ là độ co do lực đơn vị theo phương của V_B gây nên và Δ_{1P} là độ giãn do P gây nên trên hệ tĩnh định. Phương trình biến dạng trên được viết lại dưới dạng :

$$-\frac{l_1 + l_2}{EF} V_B + \frac{Pl_2}{EF} = 0$$

Từ đó ta có :

$$V_B = \frac{Pl_2}{l_1 + l_2}$$

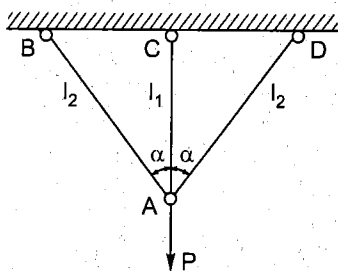
Vậy ứng suất trên mặt cắt (1-1) là :

$$\sigma_{Z1} = \frac{P}{F} \cdot \frac{l_2}{l_1 + l_2}$$

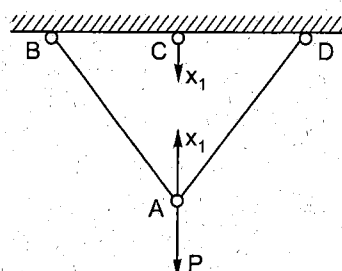
và ứng suất trên mặt cắt (2-2) là :

$$\sigma_{Z2} = \frac{P}{F} \cdot \frac{l_2}{l_1 + l_2}$$

Ví dụ 7. Cho hệ thanh chịu lực như hình 16-38 các thanh đều cùng làm bằng một loại vật liệu như nhau và kích thước mặt cắt ngang như nhau. Tính lực dọc trong mỗi thanh.



Hình 16-38



Hình 16-39

Bài giải

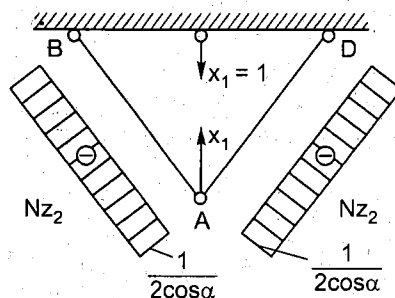
Ta chuyển sang hệ tĩnh định tương đương bằng cách vớt bỏ thanh CA (h.16-39). Trị số của lực liên kết X_1 được xác định từ điều kiện biến dạng của hệ tĩnh định tương đương với biến dạng của hệ siêu tĩnh. Nghĩa là chuyển vị của điểm A do X_1 và P gây nên theo phương thẳng đứng là bằng độ giãn của thanh AC do X_1 gây nên. Ta có phương trình :

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = -\frac{X_1l_1}{EF}$$

Dấu (-) cho biết lực tác động lên thanh ngược chiều với X_1 .

Chuyển vị đơn vị δ_{11} do $X_1 = 1$ gây nên được tính từ biểu đồ lực dọc trong các thanh (h.16-40) :

$$\delta_{11} = \frac{l_2}{2\cos^2 \alpha} \cdot \frac{1}{EF}$$



Hình 16-40

Mặt khác ta có tương quan giữa l_1 và l_2 là : $l_2 \cos \alpha = l_1$.

Vậy phương trình biến dạng được viết lại như sau :

$$\frac{1}{EF} \left(\frac{l_1}{2 \cos^3 \alpha} X_1 - \frac{l_1}{2 \cos^3 \alpha} P \right) = \frac{X_1 l_1}{EF}$$

Từ đó ta tìm thấy :

$$X_1 = \frac{P}{1 + 2 \cos^3 \alpha}$$

Sau khi đã có X_1 ta dễ dàng xác định nội lực trong các thanh. Lực dọc trong thanh AC :

$$N_1 = X_1 = \frac{P}{1 + 2 \cos^3 \alpha}$$

Trong các thanh AB và AD :

$$N_2 = \frac{P \cos \alpha}{1 + 2 \cos^3 \alpha}$$

Bài toán cũng có thể suy luận một cách đơn giản như sau : Dưới tác dụng của lực P điểm A của hệ siêu tĩnh có một chuyển vị thẳng đứng $AA' = \Delta l_1$. Đó cũng chính là độ giãn của thanh AC . Từ A hạ các đường thẳng vuông góc xuống BA' và DA' (h.16-41). Gọi I, K là chân các đường vuông góc này thì AI và AK có thể xem là các biến dạng dọc của thanh AB và AD . Tương quan giữa các biến dạng của các thanh như sau :

$$AI = \Delta l_2 = AA' \cos \alpha = \Delta l_1 \cos \alpha$$

vì biến dạng là bé nên ta xem các góc α là không đổi sau khi hệ bị biến dạng. Từ đó ta có phương trình biến dạng như sau :

$$\frac{N_2 l_2}{EF} = \frac{N_1 l_1}{EF} \cdot \cos \alpha$$

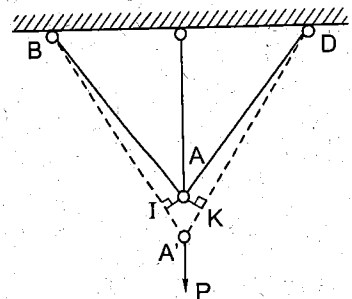
Hay :
$$N_2 = N_1 \cos^2 \alpha$$

Mặt khác tách nút A và chú ý lực dọc trong các thanh AB và AD là bằng nhau vì lí do đối xứng ta có phương trình cân bằng :

$$N_1 + 2N_2 \cos \alpha - P = 0$$

Từ đó ta có :

$$N_1 = \frac{P}{1 + 2 \cos^3 \alpha}$$



Hình 16-41

2. Trường hợp thanh chịu xoắn

Ví dụ 8. Giả sử có thanh chịu xoắn có liên kết ngàm ở hai đầu như hình 16-42. Xác định nội lực và ứng suất trên các mặt cắt.

Bài giải

Cũng như trên, ta chuyển sang hệ tĩnh định tương đương bằng cách tháo bỏ ngàm tại đầu B. Thay vào đó phản lực liên kết $\mathcal{M}_B$. Trị số của $\mathcal{M}_B$ được xác định từ điều kiện góc xoắn tại B do $\mathcal{M}$ và $\mathcal{M}_B$ gây nên hệ tĩnh định là bằng không. Ta có :

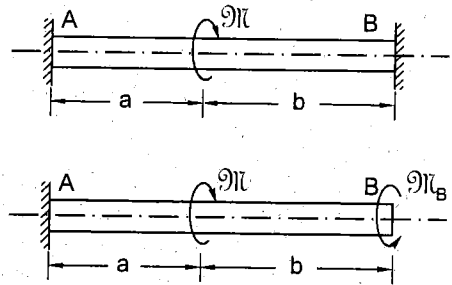
$$\frac{\mathcal{M}_B(a+b)}{GJ_p} - \frac{\mathcal{M}a}{GJ_p} = 0$$

Vậy :
$$\mathcal{M}_B = \frac{\mathcal{M}a}{a+b}$$

Nội lực trên các mặt cắt (1-1) và (2-2) sẽ là :

$$M_{z1} = \mathcal{M}_B = \frac{\mathcal{M}a}{a+b}$$

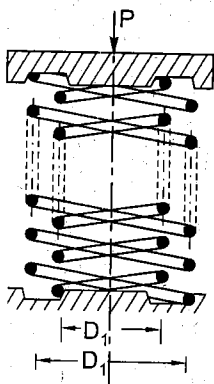
$$M_{z2} = \mathcal{M} - \mathcal{M}_B = \frac{\mathcal{M}b}{a+b}$$



Hình 16-42

Từ đó ta dễ dàng tính được ứng suất.

Ví dụ 9. Cho hai lò xo hình trụ lồng vào nhau như trên hình 16-43, trục của hai lò xo là trùng nhau. Gọi n_1 , D_1 , d_1 và n_2 , D_2 , d_2 là số vòng làm việc, đường kính trung bình và đường kính dây của lò xo bên trong và bên ngoài. Hai lò xo cùng làm bằng vật liệu có G như nhau. Chiều cao ban đầu bằng nhau. Hỏi lực tác dụng lên mỗi lò xo cho biết lực tác dụng chung trên hai lò xo là P .



Hình 16-43

Bài giải

Gọi C_1 là độ cứng của lò xo bên trong và C_2 là của lò xo bên ngoài. Các thành phần lực tác dụng lên các lò xo là P_1 , P_2 . Dưới tác dụng của P , các lò xo có cùng một độ co như nhau vì vậy ta có :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{P_1}{C_1} = \frac{P_2}{C_2} \quad (1)$$

Mặt khác ta phải có :
$$P_1 + P_2 = P \quad (2)$$

Từ 2 phương trình đó ta có :
$$\frac{P_1}{C_1} = \frac{P_2}{C_2} = \frac{P}{C_1 + C_2}$$

Hay :

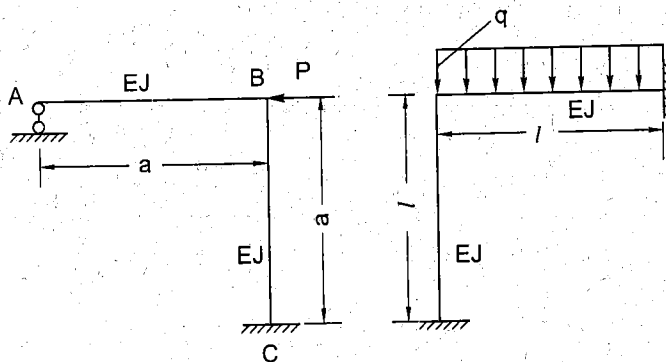
$$P_1 = \frac{C_1 P}{C_1 + C_2} ; P_2 = \frac{C_2 P}{C_1 + C_2}$$

Các độ cứng của các lò xo được tính với công thức :

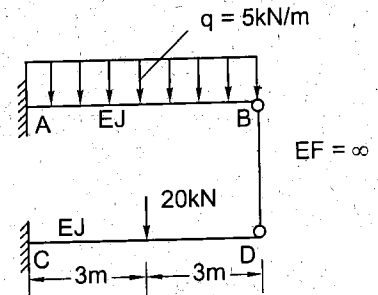
$$C_1 = \frac{Gd_1^4}{8D_1^3n_1} ; \quad C_2 = \frac{Gd_2^4}{8D_2^3n_2}$$

Bài tập

16.1. Vẽ biểu đồ mômen uốn, lực cắt và lực dọc của khung ABC (h.16-44).



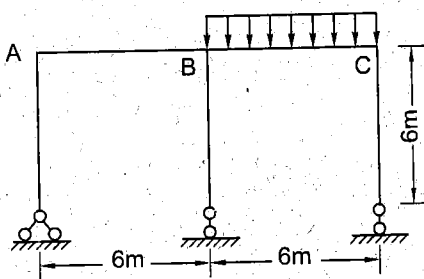
Hình 16-44



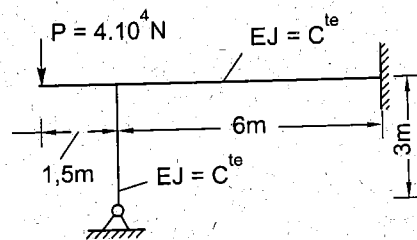
Hình 16-45

16.2. Xác định nội lực trong các thanh AB và CD. Thanh BD có độ cứng xem như tuyệt đối (h.16-45).

16.3. Vẽ biểu đồ nội lực cho các khung sau đây (h.16-46, h. 16-47) :

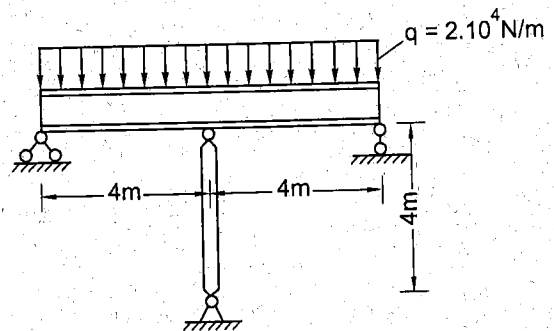


Hình 16-46



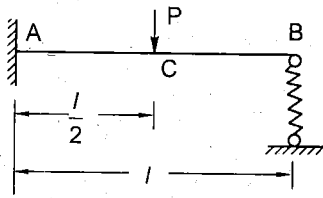
Hình 16-47

16.4. Một dầm thép có mômen quán tính của mặt cắt ngang là $J_x = 17310 \text{ cm}^4$. Hai đầu tựa lên gối cứng, ở giữa tựa trên một cột gang tròn cao $h = 4 \text{ m}$, đường kính ngoài bằng 20cm, đường kính trong bằng 15cm (h.16-48). Kiểm tra độ bền của cột. Cho biết $[\sigma] = 10 \text{ kN/cm}^2$.

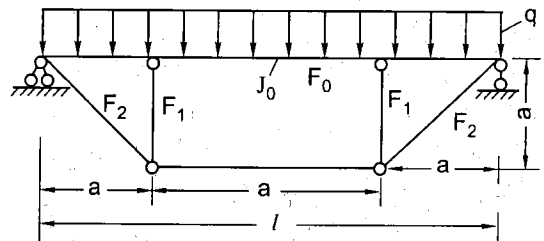


Hình 16-48

- 16.5. Vẽ biểu đồ mômen uốn của dầm một đầu ngàm, một đầu tì trên gối lò xo (h.16-49). Biết mômen quán tính mặt cắt ngang của dầm $J = 1660\text{cm}^4$, chiều dài của dầm $l = 4\text{m}$. Đường kính lò xo $D = 10\text{cm}$, đường kính dây lò xo $d = 2\text{cm}$, số vòng làm việc $n = 10$, $E = 2.10^7\text{N/cm}^2$, $G = 8.10^6\text{N/cm}^2$, $P = 20\text{kN}$.



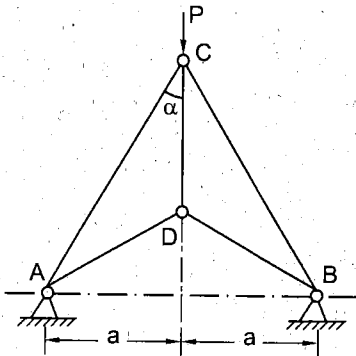
Hình 16-49



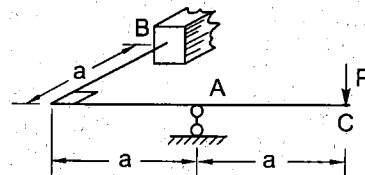
Hình 16-50

- 16.6. Một dầm có thanh giằng tăng cường chịu lực phân bố đều như trên hình 16-50. Tính mômen uốn của mặt cắt giữa dầm.

- 16.7. Xác định giá trị lực dọc trong các thanh dàn như hình 16-51. Cho biết $P = 60\text{kN}$, $a = 1\text{m}$, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$. Các thanh có độ cứng như nhau.



Hình 16-51

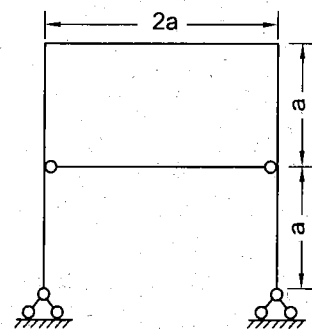


Hình 16-52

- 16.8. Một thanh tròn được gấp khúc tạo thành khung như hình 16-52. Một đầu khung được ngàm chặt, tại A được đặt lên gối tựa thẳng đứng và đầu tự do chịu một tải trọng P.

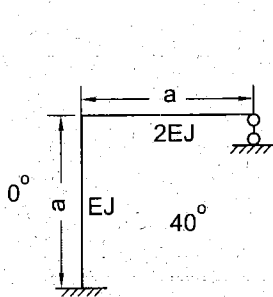
Xác định chuyển vị thẳng đứng tại C. Cho biết $G = 0,4E$.

- 16.9. Xác định ứng suất pháp lớn nhất xuất hiện trong các thanh của hệ khi tăng nhiệt độ lên một lượng $\Delta t^\circ\text{C}$. (h. 16-53).



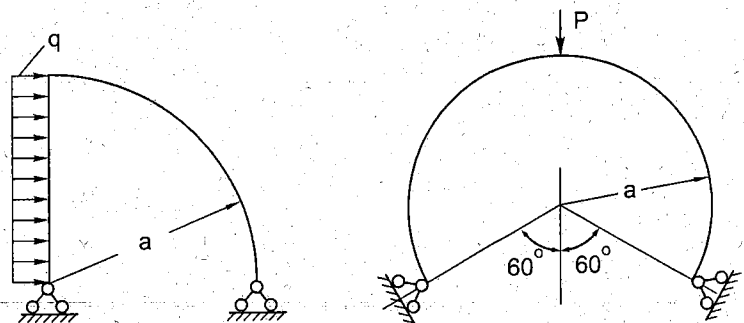
Hình 16-53

16.10. Xác định mômen uốn lớn nhất của hệ khung siêu tĩnh vẽ trên hình 16-54 khi nhiệt độ ở phía trong khung tăng lên 40°C , còn nhiệt độ ở bên ngoài không thay đổi. Chiều cao mặt cắt bằng h .



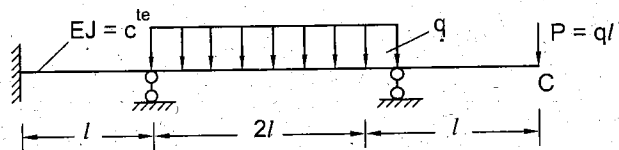
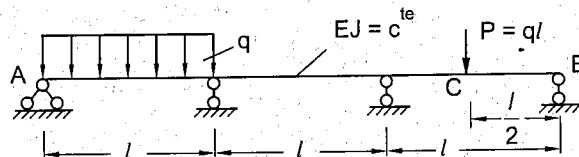
Hình 16-54

16.11. Xác định các thành phần phản lực trong hệ thanh cong siêu tĩnh chịu lực như hình 16-55.



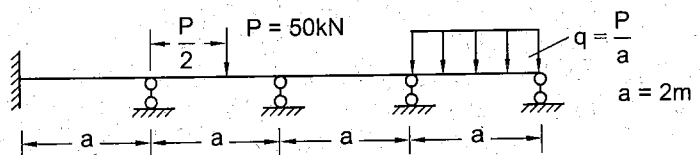
Hình 16-55

16.12. Vẽ biểu đồ mômen uốn của các dầm liên tục cho trên hình 16-56. Tính độ võng tại C.



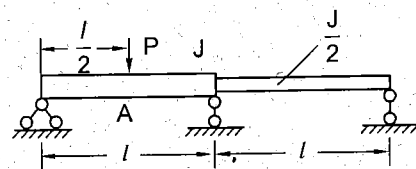
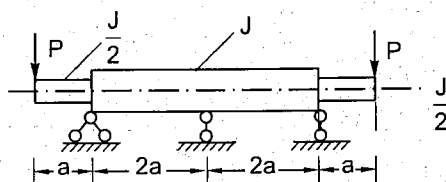
Hình 16-56

16.13. Kiểm tra độ bền của dầm liên tục chịu lực như hình 16-57 cho biết $E = 2 \cdot 10^7 \text{ N/cm}^2$ $[\sigma] = 16.000 \text{ N/cm}^2$.



Hình 16-57

16.14. Xác định các phản lực của các dầm chịu lực như hình 16-58.



Hình 16-58

§17-1. ĐỊNH NGHĨA VỀ MA TRẬN CHUYỂN

1. Vectơ trạng thái

Vectơ trạng thái được xác định bởi các thành phần sau đây :

v_A – độ võng tại điểm A của dầm đang xét.

ω_A – góc xoay của mặt cắt ngang tại A.

M_A – mômen uốn trên mặt cắt ngang tại A.

Q_A – lực cắt trên mặt cắt tại A.

1 – một đơn vị không thứ nguyên.

Đó là các thành phần cột của vectơ trạng thái ϵ_A

Như chúng ta đã biết giữa các thành phần đó có mối tương quan toán học cụ thể.

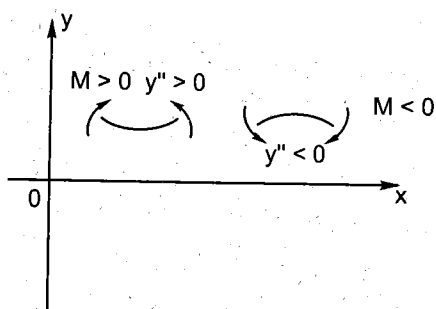
$$\frac{dQ_y}{dz} = q \quad \frac{dM_x}{dz} = Q_y$$

và

$$y'' = -\frac{M_x}{EJ_x} \quad (1)$$

Trong đó y là phương trình của đường đàn hồi. Ở đây để thuận tiện cho việc tính toán, ta chọn lại dấu cho tương quan giữa y'' và M_x . Quy ước các chiều trục tọa độ như hình 17-1, với chiều trục tọa độ đó y'' và M_x luôn luôn phù hợp với nhau. Vậy tương quan (1) được viết lại dưới dạng :

$$y'' = \frac{M_x}{EJ_x}$$



Hình 17-1

Theo quy ước dấu đó, lực phân bố hay lực tập trung có chiều cùng với chiều Oy được xem là dương và có chiều ngược lại được xem là âm.

2. Ma trận chuyển trên một đoạn thanh AB

Một đoạn thanh được xác định bởi hai mặt cắt A, B, vector trạng thái ε^A ở A và vector trạng thái ε^B ở B phải có mối tương quan nhất định. Ta biểu diễn mối tương quan đó như sau :

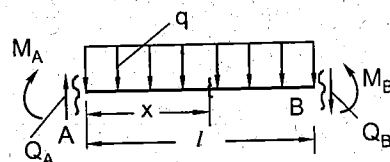
$$\varepsilon^B = \tau_A^B \varepsilon^A \quad (17-1)$$

τ_A^B là một ma trận làm chuyển hóa các phần tử của vector trạng thái ε^A thành các thành phần của vector ε^B , vì vậy τ_A^B được gọi là ma trận chuyển.

Ta sẽ xác định τ_A^B trong một số trường hợp chịu lực cụ thể như sau :

§17-2. ĐOẠN THANH CHỊU LỰC PHÂN BỐ ĐỀU

Giả sử có đoạn thanh AB chịu lực phân bố đều như hình vẽ (h.17-2). Lấy gốc tọa độ ở A. Gọi các thành phần nội lực ở A là Q_A và M_A . Tính nội lực ở một mặt cắt bất kì nào đó có hoành độ là x.



Hình 17-2

$$Q(x) = Q_A - q \cdot x \quad (2)$$

$$M(x) = M_A + Q_A x - q \frac{x^2}{2} \quad (3)$$

Nếu đem chia (3) cho EJ và tích phân liên tiếp hai lần ta sẽ có góc xoay và độ võng :

$$\omega(x) = \frac{M_A x}{EJ} + \frac{Q_A x^2}{2EJ} - \frac{qx^3}{6EJ} + \omega_A \quad (4)$$

$$v(x) = \frac{M_A}{2EJ} x^2 + \frac{Q_A x^3}{6EJ} - \frac{qx^4}{24EJ} + \omega_A x + v_A \quad (5)$$

Lấy $x = l$ thì ta sẽ có các trị số độ võng, góc xoay, mômen uốn và lực cắt tại B. Từ đó ta viết lại như sau :

$$\begin{bmatrix} v_B \\ \omega_B \\ M_B \\ Q_B \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & l & \frac{l^2}{2EJ} & \frac{l^3}{6EJ} & -\frac{ql^4}{24EJ} \\ 0 & 1 & \frac{l}{EJ} & \frac{l^2}{2EJ} & -\frac{ql^3}{6EJ} \\ 0 & 0 & 1 & l & -\frac{ql^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -ql \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_A \\ \omega_A \\ M_A \\ Q_A \\ 1 \end{bmatrix} \quad (17-2)$$

Hay :

$$\varepsilon^B = \tau_A^B \varepsilon^A$$

Ta đã xác định được ma trận chuyển khi có tải trọng phân bố đều với J là hằng số.

Trong trường hợp lực phân bố q bằng không thì ma trận chuyển sẽ có dạng :

$$\tau_A^B = \begin{bmatrix} 1 & l & \frac{l^2}{2EJ} & \frac{l^3}{6EJ} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{l}{EJ} & \frac{l^2}{2EJ} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (17-3)$$

Như vậy ma trận chuyển có dạng :

$$\tau_A^B = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ 0 & 1 & a_{23} & a_{24} & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & a_{34} & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b_4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

trong đó các thành phần a_{ij} chỉ phụ thuộc vào hình dáng kích thước và nguyên vật liệu của dầm. Còn các thành phần b_i không những phụ thuộc vào hình dáng kích thước và nguyên vật liệu mà còn phụ thuộc vào tải trọng đặt lên dầm. Như vậy a_{ij} là không thay đổi đối với một dầm còn b_i là thay đổi tùy theo tải trọng. Ta có thể viết :

$$\tau_A^B = \left[\begin{array}{c|c} A_A^B & B_{AB} \\ \hline & 1 \end{array} \right] \quad (17-4)$$

Trong đó :

$$A_A^B = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 1 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 1 & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_{AB} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

Nếu kí hiệu ε_o^A là vectơ trạng thái ở A nhưng không có thành phần đơn vị :

$$\varepsilon_o^A = \begin{bmatrix} v_A \\ \omega_A \\ M_A \\ Q_A \end{bmatrix}$$

thì ta có thể viết tương quan giữa ε_o^B và ε_o^A như sau :

$$\varepsilon_o^B = A_{AB}^B \varepsilon_o^A + B_{AB} \quad (17-5)$$

Ta nhận thấy tính chất cơ bản của ma trận chuyển là tính kết hợp. Muốn xác định được vectơ trạng thái ở mặt cắt D ta có thể qua các điểm A, B, C để đến D. Ta có :

$$\varepsilon^D = \tau_C^D \cdot \tau_B^C \cdot \tau_A^B \cdot \varepsilon^A \quad (17-6)$$

Biểu thức đó có nghĩa là ta phải thực hiện phép nhân $\tau_A^B \varepsilon^A$ trước để có ε^B sau đó lại nhân với τ_B^C để có ε^C và cuối cùng nhân với τ_C^D để có ε^D .

§17-3. DẦM CÓ BƯỚC NHẢY

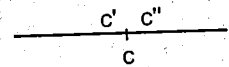
Ta xét trường hợp tại một mặt cắt nào đó có bước nhảy về độ võng, về góc xoay, về mômen uốn hay về lực cắt. Ví dụ tại mặt cắt C chẳng hạn. Từ điểm C' bên trái sang C'' bên phải của C ta có

$$v_{C''} = v_{C'} + \Delta v_C$$

$$\omega_{C''} = \omega_{C'} + \Delta \omega_C$$

$$M_{C''} = M_{C'} + \Delta M_C$$

$$Q_{C''} = Q_{C'} + \Delta Q_C$$



Hình 17-3

Tương quan đó có thể viết dưới dạng ma trận như sau :

$$\begin{bmatrix} v_{C''} \\ \omega_{C''} \\ M_{C''} \\ Q_{C''} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \Delta v_C \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \Delta \omega_C \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \Delta M_C \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \Delta Q_C \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{C'} \\ \omega_{C'} \\ M_{C'} \\ Q_{C'} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (17-7)$$

Định nghĩa : Ta gọi ma trận chuyển nghịch đảo của ma trận τ_A^B là ma trận cho phép thực hiện phép chuyển ngược từ B sang A.

Trong trường hợp ta đang xét, ma trận nghịch đảo của $\tau_C^{C''}$ là ma trận $(\tau_C^{C''})^{-1}$ với các phần tử $-\Delta v_C, -\Delta \omega_C, -\Delta M_C, -\Delta Q_C$.

§17-4. XÉT ĐOẠN DẦM CHỊU LỰC TẬP TRUNG

Giả sử có đoạn dầm chiều dài l chịu một lực tập trung tại điểm C cách gốc tọa độ A một khoảng cách α như hình 17-4. Viết ma trận chuyển τ_A^B để xác định vector trạng thái tại B từ các thành phần vector trạng thái A với biểu thức :

$$\varepsilon^B = \tau_A^B \varepsilon^A \quad (17-8)$$

Có hai phương pháp để tính τ_A^B .

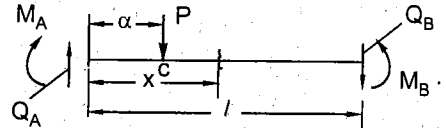
a) Tính trực tiếp

Sử dụng một mặt cắt ở hoành độ x bất kì.

Lực cắt và mômen uốn tại đó là :

$$Q(x) = Q_A - P$$

$$M(x) = Q_A \cdot x - P(x - \alpha) + M_A$$



Hình 17-4

Chia $M(x)$ cho EJ ($EJ = C^{\text{te}}$) ta có :

$$y'' = \frac{M(x)}{EJ} = \frac{M_A}{EJ} + \frac{Q_A x}{EJ} - \frac{P}{EJ}(x - \alpha)$$

Tích phân lần thứ nhất ta được :

$$\omega(x) = \frac{M_A x}{EJ} + \frac{Q_A x^2}{2EJ} - \frac{P(x - \alpha)^2}{2EJ} + \omega_A$$

Tích phân lần thứ hai ta có phương trình của đường đàn hồi :

$$v(x) = v_A + \frac{M_A x^2}{2EJ} + \frac{Q_A x^3}{6EJ} - \frac{P(x - \alpha)^3}{6EJ} + \omega_A x$$

Cho $x = l$ ta sẽ tìm thấy

$$\begin{bmatrix} v_B \\ \omega_B \\ M_B \\ Q_B \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & l & \frac{l^2}{2EJ} & \frac{l^3}{6EJ} & -\frac{P(l - \alpha)^3}{6EJ} \\ 0 & 1 & \frac{l}{EJ} & \frac{l^2}{2EJ} & -\frac{P(l - \alpha)^2}{2EJ} \\ 0 & 0 & 1 & l & -P(l - \alpha) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -P \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_A \\ \omega_A \\ M_A \\ Q_A \\ 1 \end{bmatrix}$$

b) Sử dụng các ma trận chuyển

Gọi C' và C'' là các điểm kế cận về bên trái và bên phải của C, nơi đặt lực. Ta có :

$$\varepsilon^B = \tau_{C''}^B \cdot \tau_{C'}^{C''} \cdot \tau_A^{C'} \cdot \varepsilon^A$$

Viết liên tiếp ba ma trận :

$$\tau_A^{C'} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \frac{\alpha^2}{2EJ} & \frac{\alpha^3}{6EJ} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{\alpha}{EJ} & \frac{\alpha^2}{2EJ} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tau_{C'}^{C''} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -P \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tau_{C''}^B = \begin{bmatrix} 1 & l - \alpha & \frac{(l - \alpha)^2}{2EJ} & \frac{(l - \alpha)^3}{6EJ} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{(l - \alpha)}{EJ} & \frac{(l - \alpha)^2}{2EJ} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l - \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Từ ma trận thứ nhất ta có :

$$v_C = v_A + \alpha \omega_A + \frac{\alpha^2}{2EJ} M_A + \frac{\alpha^3}{6EJ} Q_A$$

$$\omega_C = \omega_A + \frac{\alpha}{EJ} M_A + \frac{\alpha^2}{2EJ} Q_A$$

$$M_C = M_A + \alpha \cdot Q_A$$

$$Q_C = Q_A$$

Từ ma trận thứ hai ta có :

$$v_{C''} = v_C$$

$$\omega_{C''} = \omega_C$$

$$M_{C''} = M_C$$

$$Q_{C''} = Q_A - P$$

Từ ma trận thứ ba ta có :

$$\begin{aligned} v_B = v_A + \alpha \omega_A + \frac{\alpha^2}{2EJ} M_A + \frac{\alpha^3}{6EJ} Q_A \\ + (l - \alpha) \left(\omega_A + \frac{\alpha}{EJ} M_A + \frac{\alpha^2}{2EJ} Q_A \right) + \frac{(l - \alpha)^2}{2EJ} [M_A + \alpha Q_A] \\ + \frac{(l - \alpha)^2}{2EJ} [Q_A - P] \end{aligned}$$

Thực hiện phép cộng ta được :

$$v_B = v_A + l\omega_A + \frac{l^2}{2EJ} M_A + \frac{l^3}{6EJ} Q_A - P \cdot \frac{(l - \alpha)^3}{6EJ}$$

Một cách tương tự ta có :

$$\omega_B = \omega_A + lM_A + \frac{l^2}{2EJ} Q_A - P \frac{(l - \alpha)^2}{2EJ}$$

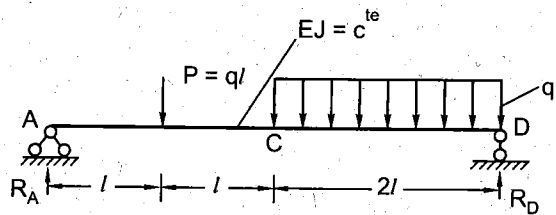
$$M_B = M_A + Q_A l - P(l - \alpha)$$

$$Q_B = Q_A - P$$

Ta tìm thấy lại ma trận chuyển như đã có ở cách thứ nhất :

$$\tau_A^B = \begin{bmatrix} 1 & l & \frac{l^2}{2EJ} & \frac{l^3}{6EJ} & -\frac{P(l - \alpha)^3}{6EJ} \\ 0 & 1 & l & \frac{l^2}{2EJ} & -\frac{P(l - \alpha)^2}{2EJ} \\ 0 & 0 & 1 & l & -P(l - \alpha) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -P \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (17-9)$$

Ví dụ 1. Cho dầm chịu lực như hình 17-5. Xác định các vectơ trạng thái ở các điểm A, C, D. Từ đó xác định được các phản lực, góc xoay ở các đầu mút A, D và độ võng tại C.



Bài giải

Tại A, ta có vectơ trạng thái là :

$$\varepsilon^A = \begin{bmatrix} v_A = 0 \\ \omega_A \\ M_A = 0 \\ Q_A = R_A \\ 1 \end{bmatrix}$$

Hình 17-5

Sử dụng (17-9) ma trận chuyển đoạn dầm AC được viết như sau :

$$\tau_A^C = \begin{bmatrix} 1 & (2l) & \frac{(2l)^2}{2EJ} & \frac{(2l)^3}{6EJ} & -\frac{ql(2l)^3}{6EJ} \\ 0 & 1 & 2l & \frac{(2l)^2}{2EJ} & -\frac{ql(2l)^2}{2EJ} \\ 0 & 0 & 1 & 2l & -ql(2l) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -ql \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Các thành phần của vector trạng thái ε^C là :

$$v_C = (2l)\omega_A + \frac{(2l)^3}{6EJ} R_A - \frac{ql^4}{6EJ}$$

$$\omega_C = \omega_A + \frac{(2l)^2}{2EJ} R_A - \frac{ql^3}{2EJ}$$

$$M_C = 2l R_A - ql^2$$

$$Q_C = R_A - ql$$

Sử dụng (17-2) để viết ma trận chuyển cho đoạn CD, ta có :

$$\tau_C^D = \begin{bmatrix} 1 & (2l) & \frac{(2l)^2}{2EJ} & \frac{(2l)^3}{6EJ} & -q \frac{(2l)^4}{24EJ} \\ 0 & 1 & \frac{(2l)}{EJ} & \frac{(2l)^2}{2EJ} & -q \frac{(2l)^3}{6EJ} \\ 0 & 0 & 1 & (2l) & -q \frac{(2l)^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -q(2l) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Các thành phần của vector trạng thái ε^D được xác định như sau :

$$\begin{aligned} v_D &= (2l)\omega_A + \frac{(2l)^3}{6EJ} R_A - \frac{ql^4}{6EJ} * \\ &+ 2l \left[\omega_A + \frac{(2l)^2}{2EJ} R_A - \frac{ql^3}{2EJ} \right] \\ &+ \frac{(2l)^2}{2EJ} [2l R_A - ql^2] \\ &+ \frac{(2l)^3}{6EJ} [R_A - ql] - \frac{q(2l)^4}{24EJ} \end{aligned}$$

* Chú ý cách viết liên hệ giữa τ_C^D và ε^C ở trên.

$$\begin{aligned}
 * v_D &= 4/\omega_A + \frac{8}{6} \cdot \frac{(2l)^3}{EJ} \cdot R_A - \frac{ql^4}{EJ} \cdot \frac{31}{6} \\
 \omega_D &= \omega_A + \frac{(2l)^2}{2EJ} \cdot R_A - \frac{ql^3}{2EJ} \\
 &\quad + \frac{2l}{EJ} [2R_A - ql^2] \\
 &\quad + \frac{(2l)^2}{2EJ} [R_A - ql] - \frac{q(2l)^3}{6EJ} \\
 * \omega_D &= \omega_A + 2 \frac{(2l)^2}{EJ} \cdot R_A - \frac{35}{6} \frac{ql^3}{2EJ} \\
 M_D &= R_A \cdot 2l - ql^2 \\
 &\quad + (2l)[R_A - ql] - q \frac{(2l)^2}{2} \\
 * M_D &= 2(2l) \cdot R_A - 3ql^2 - 2ql^2 \\
 * Q_D &= R_A - ql - q(2l)
 \end{aligned}$$

Với điều kiện $M_D = 0$ ta tìm thấy $R_A = \frac{5ql}{4}$

Từ đó : $Q_D = -R_D = -\frac{7ql}{4}$

Vậy $R_D = \frac{7ql}{4}$

Từ điều kiện $v_D = 0$, ta có :

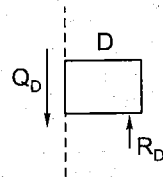
$$\begin{aligned}
 2(2l)\omega_A + 8 \frac{(2l)^3}{6EJ} \cdot 5 \frac{ql}{4} - \frac{31 \cdot ql^4}{6EJ} &= 0 \\
 \omega_A &= -\frac{49}{6} \frac{ql^4}{EJ} \cdot \frac{1}{4l} = -\frac{49}{24EJ} ql^3
 \end{aligned}$$

Thay trị số của R_A và ω_A vào biểu thức ω_D ta sẽ tìm thấy ω_D .

$$\begin{aligned}
 \omega_D &= -\frac{49}{24} \frac{ql^3}{EJ} + 2 \frac{(2l)^2}{EJ} \cdot \frac{5ql}{4} - \frac{35}{6} \frac{ql^3}{EJ} \\
 \omega_D &= \frac{47}{24} \frac{ql^3}{EJ} \approx 2 \cdot \frac{ql^3}{EJ}
 \end{aligned}$$

Độ võng tại C là :

$$\begin{aligned}
 v_C &= (2l) \left(-\frac{49}{24} \frac{ql^3}{EJ} \right) + \frac{(2l)^3}{6EJ} \left(5 \frac{ql}{4} \right) - \frac{ql^4}{6EJ} \\
 v_C &= -\frac{62}{24} \frac{ql^4}{EJ} \approx -2,6 \frac{ql^4}{EJ}
 \end{aligned}$$



§17-5. DÂY CÓ MÔMEN QUÁN TÍNH THAY ĐỔI

Ta đưa ra định nghĩa các hàm số $f'(x)$, $f(x)$, $g'(x)$ và $g(x)$ như sau :

$$\begin{aligned} f'(x) &= - \int_0^x p(u) du & f(x) &= \int_0^x f'(u) du \\ g'(x) &= \int_0^x \frac{f(u) du}{EJ(u)} & g(x) &= \int_0^x g'(u) du \end{aligned} \quad (17-10)$$

Từ đó ta có :

$$Q(x) = Q_A + f'(x)$$

$$M(x) = M_A + Q_A \cdot x + f(x)$$

$$\omega(x) = \omega_A + M_A \int_0^x \frac{dt}{EJ(t)} + Q_A \int_0^x \frac{tdt}{EJ(t)} + g'(x)$$

$$v(x) = v_A + \omega_A x + M_A \int_0^x du \int_0^u \frac{dt}{EJ(t)} + Q_A \int_0^x du \int_0^u \frac{tdt}{EJ(t)} + g(x)$$

Lấy $x = l$ ta được :

$$v_B = v_A + \omega_A l + M_A \int_0^l du \int_0^u \frac{dt}{EJ(t)} + Q_A \int_0^l du \int_0^u \frac{tdt}{EJ(t)} + g(l)$$

$$\omega_B = \omega_A + M_A \int_0^l \frac{dt}{EJ(t)} + Q_A \int_0^l \frac{tdt}{EJ(t)} + g'(l)$$

$$M_B = M_A + Q_A \cdot l + f(l)$$

$$Q_B = Q_A + f'(l)$$

Để thuận tiện cho cách viết ta đưa vào các hệ số mềm dẻo của dây AB với các định nghĩa như sau :

$$\begin{aligned} a &= \int_0^l \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \frac{dx}{EJ(x)} & b &= \int_0^l \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right) \frac{dx}{EJ(x)} \\ c &= \int_0^l \left(\frac{x}{l}\right)^2 \frac{dx}{EJ(x)} \end{aligned} \quad (17-11)$$

Từ các định nghĩa đó các tích phân trên được viết lại như sau :

$$\int_0^l \frac{dt}{EJ(t)} = a + 2b + c$$

$$\int_0^l \frac{tdt}{EJ(t)} = (b + c)l$$

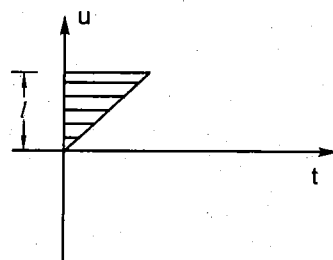
$$\int_0^l du \int_0^u \frac{dt}{EJ(t)} = \int_0^l \frac{dt}{EJ(t)} \int_t^l du = \int_0^l \frac{(l-t)dt}{EJ(t)} = (a + b)l$$

$$\int_0^l du \int_0^u \frac{dt}{EJ(t)} = \int_0^l \frac{dt}{EJ(t)} \int_t^l du = \int_0^l \frac{t(l-t)dt}{EJ(t)} = bl^2.$$

Hai biểu thức tích phân cuối cùng là suy ra từ công thức :

$$\int_0^l du \int_0^t F(u, t) dt = \int_0^l dt \int_t^l F(u, t) du$$

được cho bởi hai biểu thức tích phân kép của hàm $F(u, t)$ trải trong tam giác được gạch (hình 17-6).



Hình 17-6

Vậy ma trận chuyển trong đoạn AB với lực phân bố là :

$$\tau_A^B = \begin{bmatrix} 1 & l & (a+b)l & bl^2 & g(l) \\ 0 & 1 & a+2b+c & (b+c)l & g'(l) \\ 0 & 0 & 1 & l & f(l) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & f'(l) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (17-12)$$

Trường hợp đoạn dầm chịu lực tập trung P tại C với $AC = \alpha$ và $CB = (l-\alpha)$ ma trận chuyển sẽ là :

$$\tau_A^B = \begin{bmatrix} 1 & l & (a+b)l & bl^2 & P.b_1(\alpha) \\ 0 & 1 & a+2b+c & (b+c)l & P.b_2(\alpha) \\ 0 & 0 & 1 & l & P.b_3(\alpha) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & P.b_4(\alpha) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (17-13)$$

Trong đó các hệ số b_i như sau :

$$b_4(\alpha) = 1$$

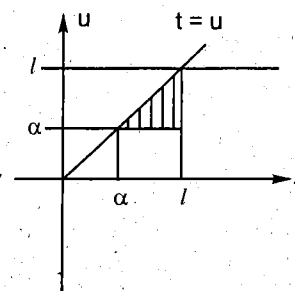
$$b_3(\alpha) = -(l-\alpha) \quad (17-14)$$

$$b_2(\alpha) = - \int_{\alpha}^l \frac{u-\alpha}{EJ(u)} du$$

$$b_1(\alpha) = - \int_{\alpha}^l dt \int_{\alpha}^t \frac{u-\alpha}{EJ(u)} du = - \int_{\alpha}^l \frac{(l-u)(u-\alpha)}{EJ(u)} du$$

biểu thức cuối cùng $b_1(\alpha)$ là tích phân kép của hàm $\frac{u-\alpha}{EJ(u)}$

trải trong tam giác được gạch, hình 17-7.



Hình 17-7

Thực vậy ta có :

$$b_1(\alpha) = - \int_{\alpha}^l \frac{u - \alpha}{EJ(u)} du \int_u^l dt = - \int_{\alpha}^l \frac{(l - u)(u - \alpha)}{EJ(u)} du$$

Trong trường hợp tổng quát ma trận cột B_{AB} mà chúng ta đã định nghĩa ở §17-2 có thể viết dưới dạng :

$$B_{AB} = \sum P_i \cdot B_{AB}(\alpha_i) + \int_{\alpha}^{\alpha''} q(\alpha) B_{AB}(\alpha) d\alpha$$

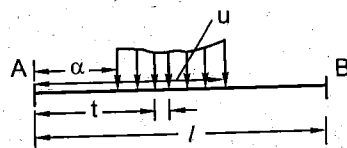
Số hạng đầu biểu diễn cho mômen của các lực tập trung đối với mặt cắt B trên đoạn AB. Hệ số $B_{AB}(\alpha_i)$ để chỉ khoảng cách từ các lực tập trung đó đến B.

Số hạng thứ hai là mômen của các lực phân bố. Ta dễ dàng thấy :

$$\begin{aligned} b_1 &= g(l) = \int_0^l q(\alpha) b_1(\alpha) d\alpha \\ b_2 &= g'(l) = \int_0^l q(\alpha) b_2(\alpha) d\alpha \\ b_3 &= f(l) = \int_0^l q(\alpha) b_3(\alpha) d\alpha \\ b_4 &= g(l) = \int_0^l q(\alpha) b_4(\alpha) d\alpha \end{aligned} \quad (17-15)$$

Trong đó $b_1(\alpha)$, $b_2(\alpha)$, $b_3(\alpha)$, $b_4(\alpha)$ là độ dài cụ thể của những lực phân bố cần thực hiện tích phân trên dầm AB.

Ví dụ có đoạn dầm chịu tải trọng phân bố bất kì như hình 17-8. Xét trên phân tố dx nhưng đổi biến thành dt . Lực tác động trên phân tố đó là $q(t)dt$. Mômen của lực đó đối với B sẽ là :



Hình 17-8

$$q(t)dt(l-t)$$

Tổng mômen sẽ là :

$$b_1(\alpha) = \int_0^l du \int_{\alpha}^u \frac{q(t)(l-t)}{EJ(t)} dt = \int_0^l \frac{q(u)(l-u)(u-\alpha)}{EJ(u)} du$$

Một cách viết tương tự đối với $b_2(\alpha)$, $b_3(\alpha)$ và $b_4(\alpha)$.

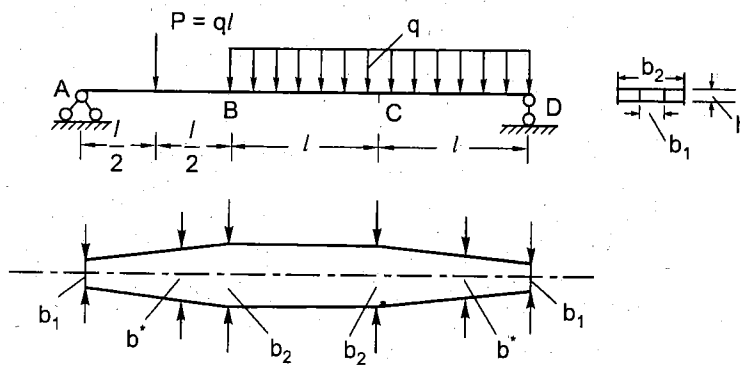
Điều kiện biên

Với phương pháp ma trận chuyển ta có thể đề cập đến các điều kiện biên sau đây :

- | | | |
|------------------------------------|------------|----------------|
| 1. Gối tựa đơn | $v = 0,$ | $M = 0$ |
| 2. Ngàm cứng | $v = 0,$ | $\omega = 0$ |
| 3. Đầu tự do | $M = 0,$ | $Q = 0$ |
| 4. Gối tựa đơn đàn hồi | $v = k'Q,$ | $M = 0$ |
| 5. Ngàm đàn hồi | $v = 0,$ | $\omega = h'M$ |
| 6. Gối tựa đàn hồi và ngàm đàn hồi | $v = k'Q,$ | $\omega = h'M$ |

k' và h' là các hằng số đàn hồi đặc trưng của liên kết.

Ví dụ 2. Cho dầm chịu lực có mặt cắt ngang thay đổi như hình 17-9. Viết các ma trận chuyển của các đoạn khác nhau của dầm, từ đó xác định các phản lực và các độ võng tại B, C.



Hình 17-9

Bài giải

Ta chia dầm thành ba đoạn AB, BC và CD.

Chiều rộng b^* của mặt cắt bất kì trên đoạn AB có phương trình là :

$$b^* = b_1 + (b_2 - b_1) \frac{x}{l}$$

Gốc tọa độ lấy tại A.

Chiều rộng b^* của mặt cắt bất kì trên đoạn CD có phương trình là :

$$b^* = b_2 - (b_2 - b_1) \frac{x}{l}$$

Gốc tọa độ là C.

Sử dụng (17-11) ta viết ma trận chuyển trong đoạn AB như sau :

$$\tau_A^B = \begin{bmatrix} 1 & l & (a+b)l & bl^2 & P.b_1(\alpha) \\ 0 & 1 & a+2b+c & (b+c)l & P.b_2(\alpha) \\ 0 & 0 & 1 & l & P.b_3(\alpha) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & P.b_4(\alpha) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Các thành phần A của ma trận (các thành phần cứng chỉ phụ thuộc hình dáng và kích thước)

Theo (17-11) ta có :

$$a+b = \int_0^l \left(1 - \frac{x}{l}\right) \frac{dx}{EJ_x} \quad (2)$$

với $J(x)$ là hàm :

$$J(x) = \frac{b^* \cdot h^3}{12} = \frac{h^3}{12} \left[b_1 + (b_2 - b_1) \frac{x}{l} \right]$$

Kí hiệu $\beta = b_1$ và $\lambda = \frac{b_2 - b_1}{l}$

Ta viết lại biểu thức (2) như sau :

$$\mathcal{Q}_1 = a + b = \frac{12}{Eh^2} \left[\int_0^l \frac{dx}{\beta + \lambda x} - \frac{1}{l} \int_0^l \frac{x dx}{\beta + \lambda x} \right]$$

Như ta đã có : (xem bảng tích phân cuối sách)

$$\begin{aligned} \int_0^l \frac{dx}{\beta + \lambda x} &= \frac{1}{\lambda} \ln \frac{\beta + \lambda l}{\beta} \\ \int_0^l \frac{x dx}{\beta + \lambda x} &= \frac{1}{\lambda} - \frac{\beta}{\lambda^2} \ln \frac{\beta + \lambda l}{\beta} \end{aligned} \quad (3)$$

Sau khi tính ta có :

$$\mathcal{Q}_1 = \frac{12}{Eh^3} \left[\frac{l}{b_2 - b_1} \ln \frac{b_2}{b_1} \left(1 + \frac{b_1}{b_2 - b_1} \right) - \frac{l}{b_2 - b_1} \right]$$

Theo (17-11) ta có :

$$b = \int_0^l \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l} \right) \frac{dx}{EJ(x)}$$

Thay $J(x)$ vào ta đưa đến biểu thức :

$$b = \frac{12}{Eh^3 l} \left[\int_0^l \frac{x dx}{\beta + \lambda x} - \frac{1}{l} \int_0^l \frac{x^2 dx}{\beta + \lambda x} \right] \quad (4)$$

Theo bảng tích phân ta có :

$$\int_0^l \frac{x^2 dx}{\beta + \alpha x} = \frac{1}{\lambda^3} \left[\frac{u^2}{2} - 2\beta u + \beta^2 \ln u \right] \Big|_{\beta}^{\beta + \alpha l} \quad \text{với } u = \beta + \lambda x \quad (5)$$

Thay (5) và (3) vào (4) ta tìm thấy :

$$\mathcal{Q}_2 = b = \frac{12l}{Eh^3} \left\{ \frac{1}{b_2 - b_1} - \frac{b_1}{(b_2 - b_1)^2} \ln \frac{b_2}{b_1} - \frac{1}{(b_2 - b_1)^3} \left[(b_2 - b_1) \frac{b_2 - 3b_1}{2} + b_1^2 \cdot \ln \frac{b_2}{b_1} \right] \right\}$$

Theo (17-11)

$$a + 2b + c = \int_0^l \frac{dx}{EJ(x)}$$

Thay $J(x)$ vào ta tìm thấy biểu thức :

$$\mathcal{Q}_3 = a + 2b + c = \frac{12}{Eh^3} \int_0^l \frac{dx}{b_1 + (b_2 - b_1) \frac{x}{l}}$$

Vậy :

$$\mathcal{Q}_3 = \frac{12}{Eh^2} \frac{l}{b_2 - b_1} \ln \frac{b_2}{b_1}$$

Với biểu thức $b + c$, ta có :

$$b + c = \int_0^l \frac{x}{1} \frac{dx}{EJ_x}$$

Dễ dàng tìm thấy :

$$\mathcal{Q}_4 = b + c = \frac{12}{lEh^3} \left[\frac{1}{b_2 - b_1} - \frac{b_1 \cdot l^2}{(b_2 - b_1)^2} \cdot \ln \frac{b_2}{b_1} \right]$$

Các thành phần B.

Từ định nghĩa ở (17-14) ta có :

$$b_1(\alpha) = - \int_{\alpha}^l \frac{(l-u)(u-\alpha)}{EJ(u)} du$$

u đóng vai trò của x và $\alpha = \frac{l}{2}$ vì lực đặt ở giữa đoạn.

Viết lại theo x và $\alpha = \frac{l}{2}$, sau khi khai triển ta có :

$$b_1\left(\frac{l}{2}\right) = - \frac{12}{Eh^3} \left[- \int_{\frac{l}{2}}^l \frac{x^2 dx}{\beta + \lambda x} - \frac{3}{2} l \int_{\frac{l}{2}}^l \frac{x dx}{\beta + \lambda x} - \frac{l^2}{2} \int_{\frac{l}{2}}^l \frac{dx}{\beta + \lambda x} \right]$$

Sử dụng các tích phân đã gặp ở trên với các cận khác nhau ta tìm thấy :

$$\int_{\frac{l}{2}}^l \frac{x^2 dx}{\beta + \lambda x} = \frac{1}{\lambda^3} [u^2 - 2\beta u + \beta^2 \ln u] \Big|_{\beta + \alpha \frac{l}{2}}^{\beta + \alpha l}$$

$$m_1 = \frac{l^3}{(b_2 - b_1)^3} \left[b_2^2 - \left(\frac{b_1 + b_2}{2} \right)^2 - b_1(b_2 - b_1) + b_1^2 \ln \frac{2b_2}{b_1 + b_2} \right]$$

Với tích phân $\frac{3}{2} l \int_{\frac{l}{2}}^l \frac{x dx}{\beta + \lambda x}$ ta có :

$$m_2 = \frac{3}{2} l \int_{\frac{l}{2}}^l \frac{x dx}{\beta + \lambda x} = \frac{3}{2} l \frac{l^2}{b_2 - b_1} \left\{ b_2 - \frac{b_1 + b_2}{2} - \left[\frac{b_1 l^2}{b_2 - b_1} \ln b_2 - \frac{b l^2}{(b_2 - b_1)^2} \ln \frac{b_2 + b_1}{2} \right] \right\}$$

Với tích phân thứ ba $\frac{l^2}{2} \int_{\frac{l}{2}}^l \frac{dx}{\beta + \lambda x}$

$$m_3 = \frac{l^2}{2} \int_{\frac{l}{2}}^l \frac{dx}{\beta + \lambda x} = \frac{l^2}{2} \frac{1}{\lambda} \left[\ln \frac{\beta + \lambda l}{\beta + \lambda \frac{l}{2}} \right]$$

$$m_3 = \frac{l^2}{2} \frac{1}{\lambda} \ln \frac{2b_2}{b_1 + b_2} = \frac{l^3}{2(b_2 - b_1)} \ln \frac{2b_2}{b_1 + b_2}$$

Vậy ta có thể viết :

$$\mathfrak{M}_1 = b_1 \left(\frac{l}{2} \right) = -\frac{12}{Eh^2} [-m_1 + m_2 - m_3]$$

$$\text{Với } b_2 \left(\frac{l}{2} \right) = - \int_{\alpha}^l \frac{u - \alpha}{EJ(u)} du = -\frac{12}{Eh^3} \int_{\frac{l}{2}}^l \frac{\left(x - \frac{l}{2} \right) dx}{\left(b_1 + \frac{b_2 - b_1}{l} x \right)}$$

$$= -\frac{12}{Eh^3} \int_{\frac{l}{2}}^l \frac{\left(x - \frac{l}{2} \right) dx}{\beta + \lambda x} = -\frac{12}{Eh^3} \left[\int_{\frac{l}{2}}^l \frac{x dx}{\beta + \lambda x} - \frac{l}{2} \int_{\frac{l}{2}}^l \frac{dx}{\beta + \lambda x} \right]$$

$$= -\frac{12}{Eh^3} \left[\frac{l^2}{b_2 - b_1} \left(\frac{b_2 - b_1}{2} - b_1 \ln \frac{2b_2}{b_1 + b_2} \right) - \frac{l^2}{2(b_2 - b_1)} \ln \frac{2b_2}{b_1 + b_2} \right]$$

$$\mathfrak{M}_2 = b_2 \left(\frac{l}{2} \right) = -\frac{12}{Eh^3} \cdot \frac{l^2}{b_2 - b_1} \left[\frac{b_2 - b_1}{2} - \left(b_1 + \frac{1}{2} \right) \ln \frac{2b_2}{b_1 + b_2} \right]$$

$$\mathfrak{M}_3 = b_3 \left(\frac{l}{2} \right) = -\left(l - \frac{l}{2} \right) = -\frac{l}{2}$$

$$\mathfrak{M}_4 = b_4 \left(\frac{l}{2} \right) = 1$$

Ma trận chuyển cho đoạn BC.

Vì $J(x) = C \stackrel{te}{=}$ và đoạn dầm chịu tải trọng phân bố đều vậy ta có thể sử dụng ma trận (17-2) để thiết lập ma trận chuyển cho đoạn này.

Ta có :

$$\tau_B^C = \begin{bmatrix} 1 & l & \frac{l^2}{2EJ} & \frac{l^3}{6EJ} & -\frac{ql^4}{24EJ} \\ 0 & 1 & \frac{l}{EJ} & \frac{l^2}{2EJ} & -\frac{ql^3}{6EJ} \\ 0 & 0 & 1 & l & -\frac{ql^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -ql \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Xét đoạn thứ ba từ C đến D

Ma trận chuyển trong đoạn này có dạng :

$$\tau_C^D = \begin{bmatrix} 1 & l & (a+b)l & bl^2 & g(l) \\ 0 & 1 & a+2b+c & (b+c)l & g'(l) \\ 0 & 0 & 1 & l & f(l) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & f'(l) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Các thành phần của A

Với chú ý $J(x) = \frac{h^3}{12} \left[b_2 - (b_2 - b_1) \frac{x}{l} \right] = \frac{h^3}{12} [\beta^* - \lambda x]$

với $\beta^* = b_2$ và $\lambda = \frac{b_2 - b_1}{l}$

ta lần lượt tính được các thành phần của ma trận như sau :

$$\alpha_1^* = a + b = \int_0^l \left(1 - \frac{x}{l} \right) \frac{dx}{EJ(x)}$$

$$\alpha_1^* = \frac{12}{Eh^3} \left[\frac{b_2 - l}{b_2 - b_1} \ln \frac{b_1}{b_2} + \frac{l}{b_2 - b_1} \right]$$

$$\alpha_2^* = b = \int_0^l \left(1 - \frac{x}{l} \right) \frac{x}{l} \frac{dx}{EJ}$$

$$\alpha_2^* = \frac{12l}{Eh^3(b_2 - b_1)^2} \left[-\frac{b_1 b_2}{b_2 - b_1} \ln \frac{b_1}{b_2} + \frac{b_2 + b_1}{2} \right]$$

$$\alpha_3^* = a + 2b + c = \int_0^l \frac{dx}{EJ_x}$$

$$\alpha_3^* = -\frac{12}{Eh^3} \cdot \frac{l}{b_2 - b_1} \ln \frac{b_1}{b_2}$$

$$\alpha_4^* = b + c = \int_0^l \frac{x}{l} \frac{dx}{EJ_x} = -\frac{12l}{Eh^3(b_2 - b_1)^2} \left[b_2 \ln \frac{b_1}{b_2} + (b_2 - b_1) \right]$$

Các thành phần của B.

Theo định nghĩa ta có :

$$f'(l) = - \int_0^l q(x) dx = -ql$$

$$f(l) = \int_0^l -qx dx = -\frac{ql^2}{2}$$

$$g'(x) = \int_0^l -q \frac{x^2}{2} \frac{dx}{EJ_x} = -\frac{12q}{2Eh^3} \int_0^l \frac{x^2 dx}{b_2 - (b_2 - b_1) \frac{x}{l}}$$

đặt $\beta^* = b_2$; $\lambda = \frac{(b_2 - b_1)}{l}$ ta lại đưa đến các tích phân quen thuộc :

$$g'(x) = -\frac{12q}{2Eh^3} \int_0^l \frac{x^2 dx}{\beta^* - \lambda x} = -K \int_0^l \frac{x^2 dx}{\beta^* - \lambda x} \text{ với } K = -\frac{12q}{2Eh^3}$$

Với các kết quả đã có, ta có thể viết :

$$g'(u) = K \frac{1}{\lambda^3} \left[\beta^{*2} \ln u - 2\beta^* u + \frac{u^2}{2} \right] + C$$

Tính với

$$g'(l) = K \frac{1}{\lambda^3} \left[\beta^{*2} \ln u - 2\beta^* u + \frac{u^2}{2} \right] \Big|_{\beta^*}^{\beta^* - \lambda l}$$

Vậy

$$g'(l) = \frac{6q}{Eh^3} \frac{l^3}{(b_2 - b_1)^3} \left[b_2^2 \ln \frac{b_1}{b_2} + (b_2 - b_1) \frac{3b_2 - b_1}{2} \right]$$

$$g(u) = \int_{\beta^*}^{\beta^* - \lambda l} g'(u) du = K \frac{1}{\lambda^3} \left[\beta^{*2} (u \ln u - u + C) - \beta^* u^2 + \frac{u^3}{6} \right] \Big|_{\beta^*}^{\beta^* - \lambda l}$$

Sau khi tính ta có :

$$g(l) = \frac{12q}{2Eh^3} \frac{l^3}{(b_2 - b_1)^3} \left\{ b_2^2 (b_1 \ln b_1 - b_2 \ln b_2 + b_2 - b_1) - b_2 (b_1^2 - b_2^2) + \frac{b_1^3 - b_2^3}{6} \right\}$$

Ta nhận thấy $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4, b_1 \left(\frac{l}{2} \right), b_2 \left(\frac{l}{2} \right), b_3 \left(\frac{l}{2} \right), b_4 \left(\frac{l}{2} \right)$ cũng như $\alpha_1^* \alpha_2^*, \alpha_3^* \alpha_4^*, g(l), g'(l), f(l)$ và $f'(l)$ là những hằng số được xác định hoàn toàn.

Tóm lại ta có các ma trận chuyển đổi liên tiếp của các đoạn như sau :

$$\tau_A^B = \begin{bmatrix} 1 & l & \alpha_1 l & \alpha_2 l^2 & P \cdot \alpha_1 \\ 0 & 1 & \alpha_3 & \alpha_4 l & P \cdot \alpha_2 \\ 0 & 0 & 1 & l & P \left(-\frac{l}{2} \right) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -P \cdot l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tau_B^C = \begin{bmatrix} 1 & l & \frac{l^2}{2EJ} & \frac{l^3}{6EJ} & -\frac{ql^4}{24EJ} \\ 0 & 1 & \frac{l}{EJ} & \frac{l^2}{2EJ} & -\frac{ql^3}{6EJ} \\ 0 & 0 & 1 & l & -\frac{ql^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -ql \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tau_C^D = \begin{bmatrix} 1 & l & \alpha_1^* l & \alpha_2^* l^2 & g(l) \\ 0 & 1 & \alpha_3^* & \alpha_4^* l & g'(l) \\ 0 & 0 & 1 & l & f(l) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & f'(l) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Chúng ta nhận thấy ba hàng dưới cùng, nghĩa là những hàng có tương quan đến mômen uốn M và lực cắt Q, không phụ thuộc gì vào hai hàng trên cùng. Chúng ta có thể thiết lập sự tương quan giữa chúng để tìm ra các phản lực của hệ.

Chuyển từ A sang B ta có :

$$M_B = M_A + lQ_A - P \frac{l}{2}$$

$$Q_B = Q_A - P$$

Chuyển từ B sang C.

$$M_C = M_B + lQ_B - \frac{ql^2}{2} = M_A + lQ_A - \frac{Pl}{2} + l(Q_A - P) - \frac{ql^2}{2}$$

$$Q_C = Q_B - ql = Q_A - P - ql$$

Chuyển từ C sang D

$$M_D = M_C + lQ_C - \frac{ql^2}{2}$$

$$Q_D = Q_C - ql$$

Đưa trị số của M_C và Q_C thay vào đây ta có :

$$M_D = M_A + lQ_A - \frac{Pl}{2} + l(Q_A - P) - \frac{ql^2}{2} + l(Q_A - P - ql) - \frac{ql^2}{2}$$

$$Q_D = Q_A - P - ql - ql$$

Từ điều kiện $M_A = 0$ và $M_D = 0$ ta xác định được Q_A và từ đó xác định được Q_D . Ta có :

$$Q_A = \frac{3}{2} ql \quad Q_D = \frac{3}{2} ql$$

Dựa vào hai hàng đầu ta viết được các biểu thức của góc quay và độ võng.

Từ A sang B

$$v_B = v_A + l\omega_A + \mathcal{C}_1.M_A + \mathcal{C}_2.l^2.Q_A + P.\mathfrak{M}_1$$

$$\omega_B = \omega_A + \mathcal{C}_3.M_A + \mathcal{C}_4.l.Q_A + P.\mathfrak{M}_2$$

Chú ý : Tổng của ba số hạng cuối là những hằng số. Ta kí hiệu chúng như sau :

$$\Delta_1 = \mathcal{C}_1.M_A + \mathcal{C}_2.l^2.Q_A + P.\mathfrak{M}_1$$

$$\Delta_2 = \mathcal{C}_3.M_A + \mathcal{C}_4.l.Q_A + P.\mathfrak{M}_2$$

(1)

(Trong đó $M_A = 0$)

Vậy ta có thể viết lại tương quan giữa v_A và v_B và ω_A , ω_B như sau :

$$v_B = v_A + l\omega_A + \Delta_1$$

$$\omega_B = \omega_A + \Delta_2$$

(2)

Ta viết tiếp từ B chuyển sang C.

$$v_C = v_B + \omega_B.l + \frac{l^2}{2EJ}.M_B + \frac{l^3}{6EJ}.Q_B - \frac{ql^4}{24EJ}$$

$$\omega_C = \omega_B + \frac{l}{EJ}.M_B + \frac{l^2}{2EJ}.Q_B - \frac{ql^3}{6EJ}$$

Hay có thể viết gọn lại như sau :

$$v_C = v_B + \omega_B.l + \Delta_3$$

$$\omega_C = \omega_B + \Delta_4$$

(3)

Với :

$$\Delta_3 = \frac{l^2}{2EJ}.M_B + \frac{l^3}{6EJ}.Q_B - \frac{ql^4}{24EJ}$$

$$\Delta_4 = \frac{l}{EJ}.M_B + \frac{l^2}{2EJ}.Q_B - \frac{ql^3}{6EJ}$$

(4)

vì M_B và Q_B đã tính được nên Δ_3 và Δ_4 là các hằng số.

Cuối cùng chuyển từ C sang D. Ta có :

$$v_D = v_C + l\omega_C + \mathcal{C}_1^* l M_C + \mathcal{C}_2^* l^2 Q_C + g(l)$$

$$\omega_D = \omega_C + \mathcal{C}_3^* M_C + \mathcal{C}_4^* l Q_C + g'(l)$$

Hay viết gọn lại

$$v_D = v_C + l\omega_C + \Delta_5$$

$$\omega_D = \omega_C + \Delta_6 \quad (5)$$

Trong đó

$$\Delta_5 = \mathcal{C}_1^* l M_C + \mathcal{C}_2^* l^2 Q_C + g(l)$$

$$\Delta_6 = \mathcal{C}_3^* M_C + \mathcal{C}_4^* l Q_C + g'(l) \quad (6)$$

Đem v_B và ω_B từ (2) thay vào (3) ta có :

$$v_C = (v_A + l\omega_A + \Delta_1) + (\omega_A + \Delta_2)l + \Delta_3$$

$$\omega_C = \omega_A + \Delta_2 + \Delta_4.$$

Từ đó ta có :

$$v_D = (v_A + l\omega_A + \Delta_1) + (\omega_A + \Delta_2)l + \Delta_3 + l(\omega_A + \Delta_2 + \Delta_4) + \Delta_5$$

$$\omega_D = \omega_A + \Delta_2 + \Delta_4 + \Delta_6$$

Từ điều kiện biên $v_D = v_A = 0$ ta tìm thấy :

$$\omega_A = -\frac{\Delta_1 + \Delta_3 + \Delta_5 + l\Delta_4 + 2l\Delta_2}{3l}$$

Khi đã có ω_A rồi ta dễ dàng xác định được ω_D .

$$\omega_D = -\frac{\Delta_1 + \Delta_3 + \Delta_5 + l\Delta_4 + 2l\Delta_2}{3l} + \Delta_2 + \Delta_4 + \Delta_6$$

Từ đó ta có :

$$v_B = l\omega_A + \Delta_1$$

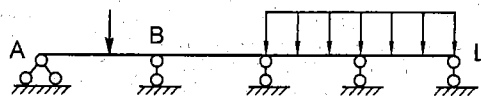
$$v_C = l\omega_A + \Delta_1 + (\omega_A + \Delta_2)l + \Delta_3.$$

§17-6. DẦM LIÊN TỤC

Ví dụ xét dầm liên tục AL với các gối tựa B, C, K. Liên kết tại A và L có thể là gối tựa, hay ngàm.

Đặc điểm của bài toán là độ võng tại B, C, K luôn luôn bằng 0. Các lực cắt tại đây luôn có bước nhảy bằng trị số của phản lực. Do đó vectơ trạng thái chỉ cần để ý đến hai thành phần là ω và M . Dùng $\mathcal{F}$ để kí hiệu các vectơ này. Ta có :

$$\mathcal{F}^A = \begin{bmatrix} \omega_A \\ M_A \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{F}^B = \begin{bmatrix} \omega_B \\ M_B \\ 1 \end{bmatrix} \dots$$



Hình 17-10

Tương quan giữa hai vectơ trạng thái là :

$$\mathcal{F}^j = U_i^j \mathcal{F}^i \quad (17-16)$$

U_i^j được gọi là ma trận thu gọn. Ta suy U_i^j từ ma trận τ_i^j như sau :

Ta có :

$$\varepsilon^j = \tau_i^j \varepsilon^i$$

với

$$\tau_i^j = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ 0 & 1 & a_{23} & a_{24} & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & a_{34} & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vì độ võng tại i và j luôn luôn bằng không, vậy ta có :

$$0 = \omega_i a_{12} + M_i a_{13} + Q_i a_{14} + b_1$$

$$\omega_j = \omega_i + M_i a_{23} + Q_i a_{24} + b_2$$

$$M_j = M_i + Q_i a_{34} + b_3$$

$$Q_j = Q_i + b_4$$

Từ phương trình thứ nhất ta tính được :

$$Q_i = - \left(\omega_i \frac{a_{12}}{a_{14}} + M_i \frac{a_{13}}{a_{14}} + \frac{b_1}{a_{14}} \right) \quad (2)$$

Thay trị số đó vào các phương trình thứ hai và thứ ba ta được :

$$\omega_j = \omega_i \left(1 - \frac{a_{12} a_{24}}{a_{14}} \right) + M_i \left(a_{23} - \frac{a_{13} a_{24}}{a_{14}} \right) + b_2 - b_1 \frac{a_{24}}{a_{14}}$$

$$M_j = \left(-\frac{a_{12} a_{34}}{a_{14}} \right) \omega_i + \left(1 - \frac{a_{13} a_{34}}{a_{14}} \right) M_i + b_3 - \frac{b_1 a_{34}}{a_{14}}$$

Từ đó ta rút ra

$$U_i^j = \begin{bmatrix} 1 - \frac{a_{12} a_{24}}{a_{14}} & a_{23} - \frac{a_{13} a_{24}}{a_{14}} & b_2 - \frac{b_1 a_{24}}{a_{14}} \\ -\frac{a_{12} a_{34}}{a_{14}} & 1 - \frac{a_{13} a_{34}}{a_{14}} & b_3 - \frac{b_1 a_{34}}{a_{14}} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Ta luôn luôn có biểu thức :

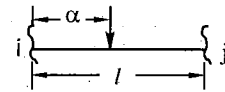
$$\mathcal{F}^L = U_K^L \cdot U_C^K \cdot U_B^C \cdot U_B^A \cdot \mathcal{F}^A \quad (4)$$

Xét một số trường hợp chịu lực cụ thể

α) Nhịp của dầm chịu lực tập trung

Như ở phần trên ta đã có

$$\tau_i^j = \begin{bmatrix} 1 & l & \frac{l^2}{2EJ} & \frac{l^3}{6EJ} & -\frac{P(l-\alpha)^3}{6EJ} \\ 0 & 1 & \frac{l}{EJ} & \frac{l^2}{2EJ} & -\frac{P(l-\alpha)^2}{2EJ} \\ 0 & 0 & 1 & l & -P(l-\alpha) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -P \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Hình 17-11

Từ đó ta có :

$$1 - \frac{a_{12}a_{24}}{a_{14}} = 2$$

$$a_{23} - \frac{a_{13}a_{24}}{a_{14}} = -\frac{l}{EJ}$$

$$b_2 - b_1 \frac{a_{24}}{a_{14}} = -\frac{P(l-\alpha)^2}{2EJ} - \frac{P(l-\alpha)^3}{6EJ} \cdot \frac{l^2}{2EJ} \cdot \frac{6EJ}{l^3} = -\frac{P(l-\alpha)^2(2l+\alpha)}{6EJl}$$

$$-\frac{a_{12}a_{34}}{a_{14}} = -\frac{6EJ}{l}$$

$$1 - \frac{a_{13}a_{34}}{a_{14}} = -2$$

$$b_3 - \frac{b_1a_{34}}{a_{14}} = -P(l-\alpha) - \frac{P(l-\alpha)^3}{6EJ} \cdot \frac{l \cdot 6EJ}{l^3} = -P(l-\alpha) \left[1 + \left(\frac{l-\alpha}{l} \right)^2 \right]$$

Vậy :

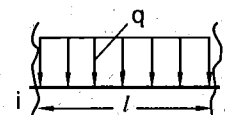
$$U_i^j = \left[\begin{array}{cc|c} -2 & -\frac{l}{EJ} & -\frac{P(l-\alpha)^2(2l+\alpha)}{6EJl} \\ -\frac{6EJ}{l} & -2 & -P(l-\alpha) \left[1 + \left(\frac{l-\alpha}{e} \right)^2 \right] \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (5)$$

b) Nhịp của dầm chịu lực phân bố đều

Ta thấy chúng chỉ khác nhau ở bộ phận B_1^j . Ta có :

$$b_2 - b_1 \cdot \frac{a_{24}}{a_{14}} = -\frac{ql^3}{6EJ} + ql^4 \cdot \frac{1}{24EJ} \cdot \frac{l^2}{2EJ} \cdot \frac{6EJ}{l^3} = -\frac{ql^3}{24EJ}$$

$$b_3 - b_1 \cdot \frac{a_{34}}{a_{14}} = -\frac{ql^2}{2} + \frac{ql^4}{24EJ} \cdot l \cdot \frac{6EJ}{l^3} = -\frac{ql^2}{4}$$



Hình 17-12

Vậy ta có :

$$U_i^j = \begin{bmatrix} -2 & -\frac{l}{EJ} & -\frac{ql^3}{23EJ} \\ -\frac{6EJ}{l} & -2 & -\frac{ql^2}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Ví dụ 3. Tính các thành phần của các vectơ trạng thái thu gọn cho dầm liên tục chịu lực như hình vẽ.

Bài giải

Xét trong đoạn nhịp AB.

Nhịp chịu lực tập trung $P = ql$ với $\alpha = \frac{l}{2}$

từ đó ta tính được :

$$b_1 = -\frac{P(l-\alpha)^2(2l+\alpha)}{6EJ} = -\frac{5ql^3}{48EJ}$$

$$b_2 = -P(l-\alpha) \left[1 + \left(\frac{l-\alpha}{l} \right)^2 \right] = -\frac{5ql^2}{8}$$

Vậy ta có :

$$\begin{bmatrix} \omega_B \\ M_B \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -\frac{l}{EJ} & -\frac{5ql^3}{48EJ} \\ -\frac{6EJ}{l} & -2 & -\frac{5ql^2}{8} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_A \\ M_A \\ 1 \end{bmatrix}$$

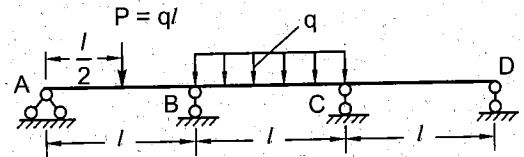
Với điều kiện biên $M_A = 0$ ta tìm thấy :

$$\omega_B = -2\omega_A - \frac{5ql^3}{48EJ}$$

$$M_B = -\frac{6EJ}{l}\omega_A - \frac{5ql^2}{8}$$

Xét đoạn dầm BC. Ma trận chuyển là ma trận (6). Vậy ta có :

$$\begin{bmatrix} \omega_C \\ M_C \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -\frac{l}{EJ} & -\frac{5ql^3}{24EJ} \\ -\frac{6EJ}{l} & -2 & -\frac{ql^2}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_B \\ M_B \\ 1 \end{bmatrix}$$



Hình 17-13

$$\omega_C = -2 \left[-2\omega_A - \frac{5ql^3}{48EJ} \right] - \frac{l}{EJ} \left[-\frac{6EJ}{6}\omega_A - \frac{5ql^2}{8} \right] - \frac{ql^3}{24EJ}$$

$$M_C = -\frac{6EJ}{l} \left[-2\omega_A - \frac{5ql^3}{48EJ} \right] - 2 \left[-\frac{6EJ}{l}\omega_A - \frac{5ql^2}{8} \right] - \frac{ql^2}{4}$$

Sau khi rút gọn ta có :

$$\omega_C = 10\omega_A + \frac{19ql^3}{24EJ}$$

$$M_C = 24 \frac{EJ}{l} \omega_A + \frac{13ql^2}{8}$$

Xét đoạn dầm CD. Vì đây là đoạn dầm không chịu lực nên trong ma trận chuyển tất cả các thành phần bị là bằng không. Ta có :

$$\begin{bmatrix} \omega_D \\ M_D \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -\frac{l}{EJ} & 0 \\ -\frac{6EJ}{l} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_C \\ M_C \\ 1 \end{bmatrix}$$

Do đó ta có :

$$\omega_D = -2 \left[10\omega_A + \frac{19ql^3}{24EJ} \right] - \frac{l}{EJ} \left[24 \frac{EJ}{l} \omega_A + \frac{13ql^2}{8} \right]$$

$$M_D = -\frac{6EJ}{l} \left[10\omega_A + \frac{19ql^3}{24EJ} \right] - 2 \left[24 \frac{EJ}{l} \omega_A + \frac{13ql^2}{8} \right]$$

Sau khi rút gọn ta có :

$$\omega_D = -44\omega_A - \frac{77}{24} \frac{ql^3}{EJ}$$

$$M_D = -108 \frac{EJ}{l} \omega_A - \frac{182}{24} ql^2$$

Điều kiện biên là $M_D = 0$, từ đó ta có

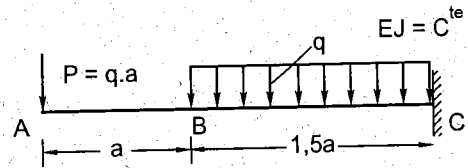
$$\omega_A = -\frac{5}{72} \cdot \frac{ql^3}{EJ}$$

Thay vào M_B và M_C ta tìm thấy :

$$M_B = -\frac{5ql^2}{24}, M_C = -\frac{ql^2}{24}$$

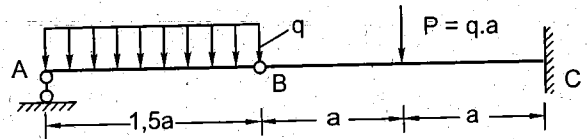
Bài tập

- 17.1.** Cho dầm chịu lực như hình vẽ (h.17-14). Xác định các vector trạng thái ở các mặt cắt A, B, C. Từ đó xác định phản lực tại C, độ võng và góc xoay tại A.



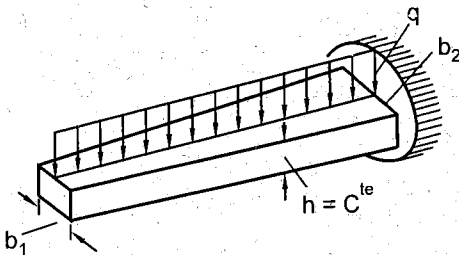
Hình 17-14

- 17.2.** Cho dầm liên kết với nhau bằng khớp như trên hình vẽ (h.17-15). Xác định các vector trạng thái ở các điểm A, B, C, D từ đó xác định các phản lực và các độ võng tại B và C.

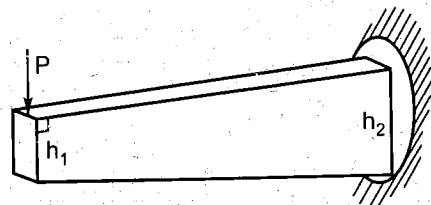


Hình 17-15

- 17.3.** Một dầm AB có mặt cắt ngang bề rộng b thay đổi bậc nhất (hình 17-16), chiều cao h là hằng số. Gọi b_1 và b_2 là chiều rộng của mặt cắt ở đầu và ở ngàm. Viết ma trận chuyển từ mặt cắt A sang B, từ đó tính độ võng góc xoay tại A và các phản lực ở ngàm.

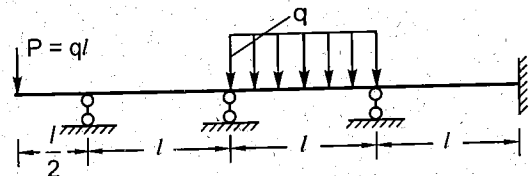


Hình 17-16



Hình 17-17

- 17.4.** Viết ma trận chuyển của dầm chịu lực như hình vẽ (h.17-17). Tính độ võng và góc xoay tại đầu tự do A.

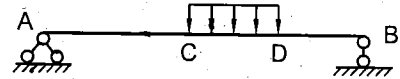


Hình 17-18

- 17.5.** Cho dầm liên tục như hình vẽ (h.17-18). Viết các ma trận chuyển, tính các mômen, phản lực tại ngàm, độ võng và góc xoay tại đầu tự do A.

PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN

Chúng ta giới hạn bài toán trong phạm vi thanh và hệ thanh. Các thanh chủ yếu chịu uốn, kéo nén và xoắn đối với thanh tròn. Với hệ thanh chúng ta cũng chỉ xét bài toán phẳng, nghĩa là chỉ xét các khung với lực tác dụng trong mặt phẳng của khung. Các biến dạng và chuyển vị cũng ở trong mặt phẳng đó.



Hình 18-1

Phương pháp của phần tử hữu hạn là chia nhỏ kết cấu thành các phần tử để xét. Như vậy ở đây dầm hay khung đều có thể chia nhỏ thành từng đoạn thanh chịu lực. Ví dụ với dầm chịu lực như hình vẽ 18-1, ta có thể chia dầm thành 3 phần tử AC, CD và DB. Sự phân chia thường dựa vào điều kiện : tải trọng khác nhau, độ cứng EJ khác nhau. Những điểm nối được gọi là nút.

Điều kiện liên kết của nút là độ võng và góc xoay của hai thanh nối phải bằng nhau. Lực tác động lên mỗi phần tử được đưa về các nút, ví dụ với phần tử CD lực phân bố q được quy về hệ lực và mômen tương đương tác động tại C và D. Sự quy đổi đó phải thỏa mãn điều kiện là công của lực phân bố q thực hiện trên những độ võng của CD phải bằng công của các lực thay thế trên các chuyển vị và biến dạng của C và D và chúng phải cân bằng với công đàn hồi do nội lực gây nên trong thể tích đoạn thanh CD.

§18-1. NHỮNG ĐỊNH NGHĨA BAN ĐẦU

Như ta đã biết, nếu gọi y là độ võng của dầm thì ta có :

$$y'' = -\frac{M_z(x)}{EJ_z}$$

$$y' = \theta(x) = -\int \frac{M_z(x)}{EJ} dx$$

và phương trình của đường đàn hồi là :

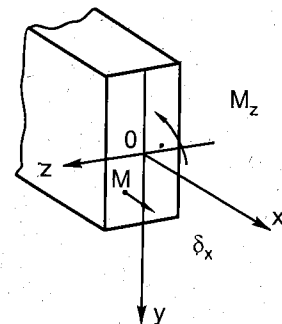
$$y = -\int \left[\int \frac{M_z(x)}{EJ} dx \right] dx$$

Mặt khác ta có tương quan giữa tải trọng và nội lực là như sau :

$$\frac{dM_z(x)}{dx} = Q_y \text{ và } \frac{dQ_y}{dx} = q$$

Hệ trục tọa độ được xác định như trên hình 18-2. Ứng suất pháp σ_x tại một điểm M nào đó trên mặt cắt được tính với công thức :

$$\sigma_x = \frac{M_z}{I} y$$



Hình 18-2

y là khoảng cách từ M đến Oz . Từ đó ta có biến dạng dài theo trục x tại M là :

$$\epsilon_z = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{M_z}{EI} y$$

Để tránh nhầm lẫn chúng ta dùng các kí hiệu trong chương này như sau :

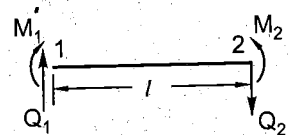
- Độ võng của trục dầm được kí hiệu là V . Phương trình đường đàn hồi là hàm $V(x)$.
- Góc xoay của mặt cắt ngang là θ .
- Mômen uốn quanh trục Oz là M .
- Lực cắt theo trục y là Q .

Để chỉ độ võng, góc xoay, mômen uốn và lực cắt tại một điểm nào đó thì ta thêm các chỉ số dưới các kí hiệu V, θ, M, Q .

Ví dụ xét một phần tử được xác định bởi hai điểm 1 và 2 với chiều dài l như hình vẽ (h.18-3). Trên các mặt cắt qua điểm 1 và 2 ta có các thành phần lực M_1, Q_1 và M_2, Q_2 .

Bốn thành phần lực đó lập thành một vectơ cột.

$$\{P\} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ M_1 \\ Q_2 \\ M_2 \end{bmatrix}$$



Hình 18-3

và được gọi là vectơ ngoại lực đối với phần tử đang xét.

Độ võng và góc xoay tại 1 và 2 được kí hiệu là V_1, θ_1 và V_2, θ_2 . Bốn thành phần đó lập thành vectơ cột.

$$\{\delta\} = \begin{bmatrix} V_1 \\ \theta_1 \\ V_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

và được gọi là vectơ biến dạng

Tương quan giữa $\{P\}$ và $\{\delta\}$ được thể hiện qua một ma trận như sau :

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ M_1 \\ Q_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ \theta_1 \\ V_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

Ta kí hiệu ma trận vuông đó là $[K]$ và gọi là ma trận cứng vì nó thể hiện độ cứng của phân tố khi chịu uốn. Như vậy ta có thể viết gọn lại như sau :

$$\{P\} = [K]\{\delta\} \quad (1)$$

§18-2. HÀM CHUYỂN VỊ

Để xác định [K] ta phải biết được phương trình đường đàn hồi $V(x)$. Ta biết rằng đi từ lực phân bố q đến độ võng V ta phải tích phân lên bốn lần. Nếu chúng ta chỉ xét trường hợp $q = c^{te}$ thì đường đàn hồi là bậc 4 và nếu q là bậc nhất thì đường đàn hồi là bậc 5. Nhưng nếu như chúng ta đưa tất cả tải trọng thành tải trọng tương đương đặt ở các nút thì ta luôn luôn có thể giả thiết rằng đường đàn hồi là một hàm bậc 3 vì $q = 0$.

$$V(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3 \quad (2)$$

trong đó $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; \alpha_4$ là các hằng số phụ thuộc vào độ cứng của dầm.

Lấy đạo hàm của $V(x)$ ta sẽ được biểu thức của góc xoay.

$$\theta(x) = \alpha_2 + 2\alpha_3 x + 3\alpha_4 x^2 \quad (3)$$

Tương quan (2) và (3) có thể viết chung dưới dạng ma trận như sau :

$$\begin{bmatrix} V(x) \\ \theta(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Nếu lấy đạo hàm của (3) và nhân với EJ thì ta sẽ có $M(x)$ và như vậy biến dạng ε_x sẽ là :

$$\varepsilon_x = y \cdot [0 \quad 0 \quad -2 \quad -6x] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} \quad (5)$$

(y ở đây là khoảng cách từ điểm M nào đó trên mặt cắt đối với trục Oz).

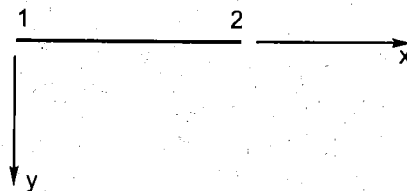
Với hàm $V(x)$ như đã chọn ta sẽ xác định được $[\alpha]$ theo vectơ chuyển vị $[\delta]$. Chọn 1 xem như gốc tọa độ, vậy với $x = 0$ ta có :

$$V_1 = \alpha_1$$

$$\theta_1 = \alpha_2$$

$$V_2 = \alpha_1 + \alpha_2 l + \alpha_3 l^2 + \alpha_4 l^3$$

$$\theta_2 = \alpha_2 + 2\alpha_3 l + 3\alpha_4 l^2$$



Hay viết dưới dạng ma trận :

Hình 18-4

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ \theta_1 \\ V_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & 1 & 2l & 3l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Gọi ma trận liên kết đó là $[A]$ vậy (6) có thể viết lại dưới dạng :

$$[\delta] = [A].[\alpha] \quad (6)$$

trong đó

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & 1 & 2l & 3l^2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Nếu ta nhân hai vế của (6) cho ma trận nghịch đảo của $[A^{-1}]$ thì ta có :

$$[\alpha] = [A^{-1}][\delta] \quad (8)$$

$[A^{-1}]$ được tính từ (7) với kết quả như sau :

$$[A^{-1}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{l^2} & -\frac{2}{l} & \frac{3}{l^2} & -\frac{1}{l} \\ \frac{2}{l^3} & \frac{1}{l^2} & -\frac{2}{l^3} & \frac{1}{l^2} \end{bmatrix}$$

Thay vào cho (8) ta có được các hằng số đàn hồi như sau :

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{l^2} & -\frac{2}{l} & \frac{3}{l^2} & -\frac{1}{l} \\ \frac{2}{l^3} & \frac{1}{l^2} & -\frac{2}{l^3} & \frac{1}{l^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ \theta_1 \\ V_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Thay kết quả đó vào (5) ta có :

$$\epsilon_x = y. \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & -6x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{l^2} & -\frac{2}{l} & \frac{3}{l^2} & -\frac{1}{l} \\ \frac{2}{l^3} & \frac{1}{l^2} & -\frac{2}{l^3} & \frac{1}{l^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ \theta_1 \\ V_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Gọi $G(x) = [0 \quad 0 \quad -2 \quad -6x]$

Thực hiện phép nhân giữa $G(x)$ với $[A^{-1}]$ ta sẽ được ma trận gồm 4 thành phần như sau :

$$G(x).[A^{-1}] = \left[\left(\frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3} \right) \left(\frac{4}{l} - \frac{6x}{l^2} \right) \left(-\frac{6}{l^2} + \frac{12}{l^3} \right) \left(\frac{2}{l} - \frac{6x}{l^2} \right) \right]$$

Công thức của biến dạng được viết gọn lại dưới dạng ma trận :

$$\varepsilon_x = y \cdot \{G(x) \cdot [A^{-1}]\} [\delta] \quad (11)$$

Ứng suất pháp tại một điểm M nào đó trên mặt cắt ngang sẽ là :

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x = E \cdot y \cdot \{G(x) \cdot [A^{-1}]\} [\delta] \quad (12)$$

§18-3. XÁC ĐỊNH CÁC THÀNH PHẦN CỦA MA TRẬN CỨNG

Để xác định được các thành phần của ma trận cứng ta phải dựa vào điều kiện cân bằng giữa công ngoại lực và nội lực.

Công của ngoại lực ở đây là công của lực cắt Q và mômen M tại các nút 1 và 2 trên các chuyển vị và biến dạng tương ứng. Ta có :

$$w_e = [V_1 \theta_1 V_2 \theta_2] \begin{bmatrix} Q_1 \\ M_1 \\ Q_2 \\ M_2 \end{bmatrix}$$

Hay viết gọn lại :

$$W_e = \{\delta\}^T [P] \quad (13)$$

Ta tính sang công của nội lực.

Công khả dĩ tích lũy trong một vi phân thể tích là :

$$dW_i = [\varepsilon_x]^T [\sigma_x] \cdot dV \quad (14)$$

Công tích lũy trong toàn phần tử là :

$$W_i = \iiint_V [\varepsilon_x]^T [\sigma_x] dV$$

Thay trị số của ε_x và σ_x được tính từ (11) và (12) vào đây ta có.

$$W_i = \iiint_V y \{G(x) [A^{-1}] [\delta]\}^T \cdot E y \{G(x) [A^{-1}] [\delta]\} dx dy dz \quad (15)$$

Cân bằng (13) và (15) với chú ý $[\delta]^T$ không phụ thuộc vào dấu tích phân ta có thể đưa ra ngoài và ước lượng cả hai vế, cuối cùng ta có :

$$[P] = E \iint_F y^2 dF \int_0^l \{G(x) \cdot [A^{-1}]\}^T \{G(x) \cdot [A^{-1}]\} [\delta] dx$$

Hay

$$[P] = E \cdot I \cdot \int_0^l \{G(x) \cdot [A^{-1}]\}^T \{G(x) \cdot [A^{-1}]\} dx \cdot [\varepsilon] \quad (16)$$

Vậy ma trận $[K]$ là :

$$[K] = E \cdot I \cdot \int_0^l \{G(x) \cdot [A^{-1}]\}^T \{G(x) \cdot [A^{-1}]\} dx \quad (17)$$

Thay biểu thức (11) vào đây ta có :

$$[K] = EI \int_0^l \begin{bmatrix} \left(\frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3}\right) \\ \left(\frac{4}{l} - \frac{6x}{l^2}\right) \\ \left(-\frac{6}{l^2} + \frac{12}{l^3}\right) \\ \left(\frac{2}{l} - \frac{6x}{l^2}\right) \end{bmatrix} \left[\left(\frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3}\right) \left(\frac{4}{l} - \frac{6x}{l^2}\right) \left(-\frac{6}{l^2} + \frac{12}{l^3}\right) \left(\frac{2}{l} - \frac{6x}{l^2}\right) \right] dx$$

Ví dụ ta tính cho K_{11}

$$K_{11} = EI \int_0^l \left(\frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3}\right) \left(\frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3}\right) dx = 12.EI$$

Tương tự như vậy ta sẽ tìm thấy tất cả 16 thành phần của $[K]$.

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ M_1 \\ Q_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ \theta_1 \\ V_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (18)$$

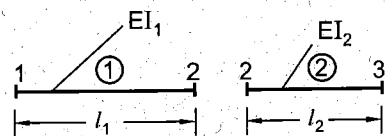
§18-4. GHÉP CÁC PHẦN TỬ

Mỗi một nút thường là sự kết hợp hai nút thuộc về hai phần tử kế cận. Lực sẽ là tổng những lực đặt trên hai nút và các chuyển vị là phải như nhau vì chúng chỉ là một.

Ví dụ ta có hai phần tử với độ dài là l_1 và l_2 được nối với nhau ở nút 2 (hình vẽ 18-5).

Ma trận cứng của phần tử (1) là :

$$[K^1] = \frac{EI_1}{l_1^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l_1 & -12 & 6l_1 \\ 6l_1 & 4l_1^2 & -6l_1 & 2l_1^2 \\ -12 & -6l_1 & 12 & -6l_1 \\ 6l_1 & 2l_1^2 & -6l_1 & 4l_1^2 \end{bmatrix}$$



Hình 18-5

Ma trận cứng của phần tử (2) là ;

$$[K^2] = \frac{EI_2}{l_2^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l_2 & -12 & 6l_2 \\ 6l_2 & 4l_2^2 & -6l_2 & 2l_2^2 \\ -12 & -6l_2 & 12 & -6l_2 \\ 6l_2 & 2l_2^2 & -6l_2 & 4l_2^2 \end{bmatrix}$$

Vì rằng $M_2 = M_2^1 + M_2^2$

$Q_2 = Q_2^1 + Q_2^2$

nên ma trận chung của chúng phải được kết hợp như sau :

$$\begin{bmatrix} Q_1^1 \\ M_1^1 \\ Q_2 \\ M_2 \\ Q_3^3 \\ M_3^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI_1}{l_1^3} & \frac{6EI_1}{l_1^2} & -\frac{12EI_1}{l_1^3} & \frac{6EI_1}{l_1^2} & 0 & 0 \\ \frac{6EI_1}{l_1^2} & \frac{4EI_1}{l_1} & -\frac{6EI_1}{l_1^2} & \frac{2EI_1}{l_1} & 0 & 0 \\ -\frac{12EI_1}{l_1^3} & -\frac{6EI_1}{l_1^2} & \frac{12EI_1}{l_1^3} + \frac{12EI_2}{l_2^3} & -\frac{6EI_1}{l_1^2} + \frac{6EI_2}{l_2^2} & -\frac{12EI_2}{l_2^3} & \frac{6EI_2}{l_2^2} \\ \frac{6EI_1}{l_1^2} & \frac{2EI_1}{l_1} & -\frac{6EI_1}{l_1^2} + \frac{6EI_2}{l_2^2} & \frac{4EI_1}{l_1} + \frac{4EI_2}{l_2} & -\frac{6EI_1}{l_2^2} & \frac{2EI_2}{l_2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EI_2}{l_2^3} & -\frac{6EI_2}{l_2^2} & \frac{12EI_2}{l_2^3} & -\frac{6EI_2}{l_2^2} \\ 0 & 0 & \frac{6EI_2}{l_2^2} & \frac{2EI_2}{l_2} & -\frac{6EI_2}{l_2^2} & \frac{4EI_2}{l_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^1 \\ \theta_1^1 \\ V_2 \\ \theta_2 \\ V_3 \\ \theta_3 \end{bmatrix}$$

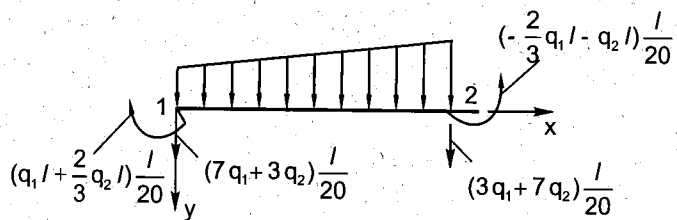
§18-5. LỰC TƯƠNG ĐƯƠNG

Giả dụ ta có đoạn dầm chịu tải trọng phân bố bậc nhất như hình vẽ. Lấy gốc tọa độ ở tại điểm 1 của phần tử thì phương trình của lực phân bố là :

$$g(x) = (q_2 - q_1) \frac{x}{l} + q_1 \quad (19)$$

Giả sử có những lực và mômen tập trung ở nút 1 và 2. Công khả dĩ của những lực đó trên những chuyển vị khả dĩ do sự biến dạng của dầm gây nên là :

$$W_P = [\delta]^T [P] \quad (20)$$



Hình 18-6

Công đó phải tương đương với công khả dĩ do lực phân bố gây nên trong biến dạng của dầm, nghĩa là theo độ võng của dầm.

Như ở công thức (4) phương trình độ võng của dầm là :

$$V(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} \quad (21)$$

Gọi hàm

$$[\phi(x)] = [1 \quad x \quad x^2 \quad x^3]$$

Thì (21) có thể viết gọn lại dưới hình thức ma trận :

$$V(x) = [\phi(x)][\alpha] \quad (22)$$

Công khả dĩ do q gây nên trên toàn phần tử là :

$$W_q = \int_0^l [\phi(x)][\alpha]g(x)dx$$

Viết như vậy chúng ta có được một tổng vì biểu thức (22) là một đa thức. Để tách công do từng thành phần của ma trận gây nên ta viết phép nhân ma trận hoán vị cho ma trận $[\alpha]$ lên trước. Biểu thức (22) được viết lại như sau :

$$V(x) = [\alpha][\phi(x)]$$

Như vậy $V(x)$ được biểu diễn dưới dạng một ma trận hàng

$$V(x) = [\alpha_1 \quad \alpha_2 x \quad \alpha_3 x^2 \quad \alpha_4 x^3]$$

Để thực hiện phép nhân với $q(x)$ ta phải chuyển ma trận đó thành ma trận cột. Vậy :

$$W_q = \int_0^l \{[\alpha][\phi(x)]\}^T q(x)dx$$

Theo (8) ta có :

$$[\alpha] = [A^{-1}][\delta]$$

Đem thay vào biểu thức của W_q với chú ý $[A^{-1}][\delta]$ không phụ thuộc vào dấu tích phân ta có :

$$W_q = [A^{-1}]^T [\delta]^T \int_0^l [\phi(x)]^T \cdot q(x)dx \quad (23)$$

Cân bằng (20) và (23) ta tìm thấy :

$$[P] = [A^{-1}]^T \int_0^l [\phi(x)]^T \cdot q(x)dx \quad (24)$$

Với trường hợp đang xét ta có :

$$[P] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{l^2} & \frac{2}{l^3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{l} & \frac{1}{l^2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{l^2} & -\frac{2}{l^3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{l} & \frac{1}{l^2} \end{bmatrix} \int_0^l \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} \{ (q_2 - q_1) \frac{x}{l} + q_1 \} dx$$

Phép tích phân cho ta một ma trận cột như sau :

$$\begin{bmatrix} (q_1 + q_2) \frac{l}{2} \\ (2q_2 + q_1) \frac{l^2}{6} \\ (3q_2 + q_1) \frac{l^3}{12} \\ (4q_2 + q_1) \frac{l^4}{20} \end{bmatrix}$$

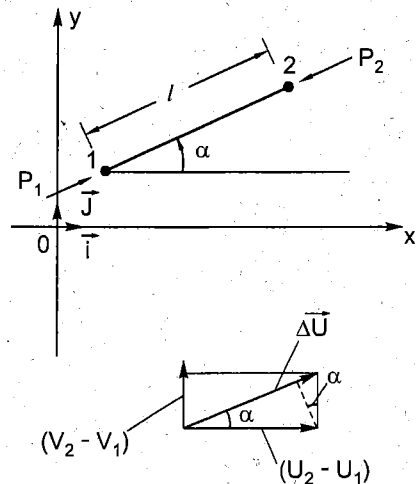
Thực hiện phép nhân với ma trận $[A^{-1}]^T$ ta sẽ được :

$$[P] = \frac{l}{20} \begin{bmatrix} 7q_1 + 3q_2 \\ q_1 l + 2q_2 \frac{l}{3} \\ 3q_1 + 7q_2 \\ -\frac{2q_1 l}{3} - q_2 l \end{bmatrix}$$

Các thành phần lực tương đương tác dụng như trên hình (18-6).

§18-6. THANH CHỊU UỐN VÀ KÉO NÉN ĐÚNG TÂM

Xét một phần tử chịu kéo nén đúng tâm. Để xét được một cách tổng quát ta giả sử chọn một hệ trục tọa độ Oxy mà thanh có phương tạo với trục x một góc α (h.18-7). Tại nút 1 và 2 của phần tử ta có hai lực dọc trục là P_1 và P_2 . Hình chiếu của P_1 và P_2 xuống các trục tọa độ được kí hiệu là P_x^1, P_y^1 và P_x^2, P_y^2 . Gọi $\bar{U}_1$ và $\bar{U}_2$ là các chuyển vị của các nút 1 và 2 sau biến dạng. Độ giảm hay co của thanh thể hiện qua hiệu của $\bar{U}_1$ và $\bar{U}_2$



Hình 18-7

$$\Delta \bar{U} = \bar{U}_2 - \bar{U}_1 = (U_2 - U_1) \vec{i} + (V_2 - V_1) \vec{j}$$

Các thành phần hình chiếu của $\Delta \bar{U}$ lên các trục tọa độ là $(U_2 - U_1)$ và $(V_2 - V_1)$. Vì biến dạng là vô cùng bé nên ta xem như góc α không đổi. Phương của $\Delta \bar{U}$ cũng là phương của thanh vậy ta có :

$$\Delta l = (U_2 - U_1) \cos \alpha + (V_2 - V_1) \sin \alpha \quad (a)$$

Mặt khác ta có :

$$\Delta l = \frac{Pl}{EF} \quad (b)$$

Trị số của P có thể tính theo các thành phần hình chiếu như sau :

$$P = \frac{P_x^1}{\cos \alpha} = \frac{P_y^1}{\sin \alpha} \quad (c)$$

Thay (c) vào (b) ta có :

$$\Delta l = - \frac{P_x^1 l}{EF \cos \alpha}$$

Vậy ta có thể viết :

$$P_x^1 = - \frac{EF}{l} [(U_2 - U_1) \cos^2 \alpha + (V_2 - V_1) \sin \alpha \cos \alpha] = -P_x^2$$

Tương tự như vậy nếu thay P là P_y^1 ta có :

$$P_y^1 = - \frac{EF}{l} [(U_2 - U_1) \cos \alpha \sin \alpha + (V_2 - V_1) \sin^2 \alpha] = -P_y^2$$

Từ hai biểu thức đó ta có thể viết sự tương quan giữa các lực và các chuyển vị như sau :

$$\begin{bmatrix} P_x^1 \\ P_y^1 \\ P_x^2 \\ P_y^2 \end{bmatrix} = \frac{EF}{l} \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha & -\cos^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha \\ \cos \alpha \sin \alpha & \sin^2 \alpha & -\cos \alpha \sin \alpha & -\sin^2 \alpha \\ -\cos^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ -\cos \alpha \sin \alpha & -\sin^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha & \sin^2 \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

Vậy ma trận cứng của thanh khi chịu kéo nén đúng tâm trong một tọa độ bất kì là :

$$[K] = \frac{EF}{l} \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha & -\cos^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha \\ \cos \alpha \sin \alpha & \sin^2 \alpha & -\cos \alpha \sin \alpha & -\sin^2 \alpha \\ -\cos^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ -\cos \alpha \sin \alpha & -\sin^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha & \sin^2 \alpha \end{bmatrix} \quad (25)$$

α là phương của thanh trong tọa độ đang xét.

Khi $\alpha = 0$, lúc đó thanh có vị trí song song với trục x, ma trận cứng của thanh sẽ là :

$$[K] = \frac{EF}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

Chú ý : Lúc này ta không còn thành phần chuyển vị theo phương Oy nữa và lực cũng chỉ còn thành phần theo phương Ox.

Kết hợp ma trận cứng của thanh chịu uốn (18) với ma trận cứng của thanh chịu kéo hoặc nén ta được ma trận cứng của thanh vừa chịu kéo nén vừa chịu uốn. Ma trận đó được thể hiện như sau :

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Q_1 \\ M_1 \\ X_2 \\ Q_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EF}{l} & 0 & 0 & -\frac{EF}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EF}{l} & 0 & 0 & \frac{EF}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ \theta_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (27)$$

Với thanh tròn vừa chịu uốn, kéo (hoặc nén) và xoắn thì ma trận cứng được thiết lập như sau :

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Q_1 \\ M_1 \\ M_x^1 \\ X_2 \\ Q_2 \\ M_2 \\ M_x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EF}{l} & 0 & 0 & 0 & -\frac{EF}{l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ_P}{l} & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ_P}{l} \\ -\frac{EF}{l} & 0 & 0 & 0 & \frac{EF}{l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ_P}{l} & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ_P}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ \theta_1 \\ \gamma_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ \theta_2 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} \quad (28)$$

γ là góc xoắn do M_x gây nên.

§18-7. BÀI TOÁN XOAY TRỤC

Đối với hệ khung ta phải chọn một hệ trục thống nhất. Như vậy từng hệ thanh riêng biệt phải thực hiện một phép xoay trục để đưa về hệ chung của toàn khung.

Hãy xét trường hợp một vectơ chuyển vị $\vec{U}$ nào đó.

Gọi U_x và U_y là các thành phần hình chiếu của $\vec{U}$ trong hệ trục tọa độ Oxy.

$$\vec{U} = U_x \vec{i} + U_y \vec{j} \quad (29)$$

$\vec{i}, \vec{j}$ là các vectơ đơn vị trên trục Ox, Oy

Giả sử cho quay hệ trục Oxy sang một hệ trục mới Oξη. Hãy tìm tương quan giữa các hình chiếu của $\vec{U}$ lên Oξ, Oη và U_x, U_y .

Từ biểu thức (29) ta thấy hình chiếu của $\vec{U}$ lên các trục Oξ, Oη là bằng tổng hình chiếu của các vectơ thành phần. Do đó ta có thể viết :

$$U_\xi = U_x \cos \alpha + U_y \sin \alpha$$

$$U_\eta = -U_x \sin \alpha + U_y \cos \alpha$$

Hay dưới dạng ma trận ta có thể viết

$$\begin{bmatrix} U_\xi \\ U_\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_x \\ U_y \end{bmatrix} \quad (30)$$

ma trận

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

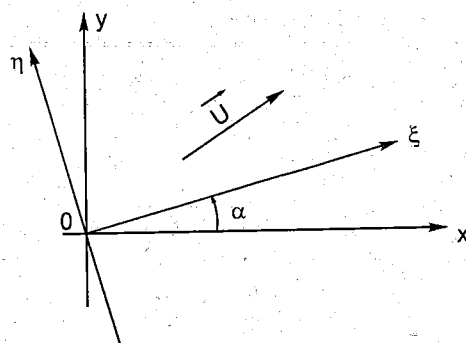
được gọi là ma trận xoay trục.

Vừa rồi ta thực hiện một phép quay từ trục Ox sang Oξ theo chiều ngược với chiều của kim đồng hồ. Ta xem phép quay đó là dương. Nếu thực hiện một phép quay ngược lại từ Oξ sang Ox góc α trở thành âm thì ma trận xoay trục sẽ là :

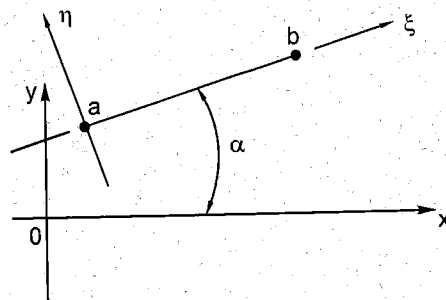
$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

Như vậy là chỉ có sự đổi dấu của sinα.

Bây giờ giả sử xét một phần tử ab nào đó (h.18-9). Gọi U_ξ^a, U_η^a và θ_a là các chuyển vị của nút a theo các phương ξ, η và góc xoay của mặt cắt ngang ở a.



Hình 18-8



Hình 18-9

U_{ξ}^b, U_{η}^b và θ_b là các chuyển vị của nút b theo các phương ξ, η và góc xoay của mặt cắt ngang ở b.

Hệ tọa độ $O\xi\eta$ là hệ tọa độ cục bộ. Ta phải đưa về tọa độ chung bằng cách quay một góc α theo chiều âm. Các thành phần chuyển vị của hệ trong hệ chung Oxy sẽ được tính với ma trận xoay trục như sau :

(Với chú ý góc xoay của mặt cắt ngang không thay đổi khi xoay trục tọa độ).

$$\begin{bmatrix} U_x^a \\ U_y^a \\ \theta_a \\ U_x^b \\ U_y^b \\ \theta_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{\xi}^a \\ U_{\eta}^a \\ \theta_a \\ U_{\xi}^b \\ U_{\eta}^b \\ \theta_b \end{bmatrix}$$

Ta có thể viết gọn lại :

$$[U] = [M_T][U^*] \quad (31)$$

Trong đó $[U]$ là ma trận các thành phần chuyển vị và biến dạng trong hệ tọa độ chung và $[U^*]$ là các thành phần của chuyển vị và biến dạng trong hệ tọa độ địa phương. $[M_T]$ là ma trận xoay trục.

Những điều ta vừa nói đối với vectơ chuyển vị $\bar{U}$ cũng hoàn toàn đúng với vectơ lực. Chúng ta xét với sáu thành phần $X_1, Q_1, M_1, X_2, Q_2, M_2$. Gọi $X_1^*, Q_1^*, M_1^*, X_2^*, Q_2^*, M_2^*$ là các thành phần trong hệ tọa độ cục bộ $O\xi\eta$. Ta sử dụng phép quay trục để có $X_1, Q_1, M_1, X_2, Q_2, M_2$ trong hệ Oxy.

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Q_1 \\ M_1 \\ X_2 \\ Q_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1^* \\ Q_1^* \\ M_1^* \\ X_2^* \\ Q_2^* \\ M_2^* \end{bmatrix}$$

Ta thấy trong phép quay đó trị số của mômen là không thay đổi. Dưới dạng ma trận ta có thể viết như sau :

$$\{P\} = [M_T]\{P^*\} \quad (32)$$

§18-8. TÍNH MA TRẬN CỨNG KHI QUAY TRỤC

Ta giả sử một phần tử được viết trong hệ cục bộ, quan hệ giữa lực và chuyển vị là :

$$\{P^*\} = [K^*][U^*] \quad (33)$$

$[K^*]$ chỉ ma trận cứng viết theo hệ trục tọa độ chọn trùng với trục của thanh.

Từ các biểu thức (31) và (32) ta có thể viết :

$$\{U^*\} = [M_T]^{-1}\{U\}$$

$$\{P^*\} = [M_T]^{-1}\{P\}$$

Thay các giá trị đó vào (33) ta có :

$$[M_T]^{-1}\{P\} = [K^*][M_T]^{-1}\{U\}$$

Nhân cả hai vế với $[M_T]$

$$[M_T][M_T]^{-1}\{P\} = [M_T][K^*][M_T]^{-1}\{U\}$$

Vậy :

$$\{P\} = [M_T][K^*][M_T]^{-1}\{U\} \quad (34)$$

Ma trận cứng $[K]$ có biểu thức như sau :

$$[K] = [M_T][K^*][M_T]^{-1}$$

Biểu thức đó chỉ có nghĩa tượng trưng. Muốn tính được $[K]$ ta phải xuất phát từ (34) thực hiện các bước sau đây :

1. Tính $\{U^*\}$

$$\{U^*\} = [M_T]^{-1}\{U\}$$

2. Tính $\{P^*\}$

$$\{P^*\} = [K^*]\{U^*\}$$

3. Đưa $\{P^*\}$ về hệ chung :

$$\{P\} = [M_T]\{P^*\}$$

Các bước đó được thực hiện cụ thể như sau :

Tính ma trận nghịch đảo của $[M_T]$

Định thức của ma trận là bằng 1

Định thức con của $\sin\alpha$ là $-\sin\alpha$

Định thức con của $-\sin\alpha$ là $\sin\alpha$

Vậy ma trận nghịch đảo của ma trận xoay trục từ hệ trục $O\xi\eta$ sang Oxy là :

$$[M_T]^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ta cũng có thể suy luận một cách đơn giản hơn. Ma trận nghịch đảo của $[M_T]$ là ma trận thực hiện một phép quay ngược lại vậy α phải đổi chiều, vậy phải lấy $-\alpha$ thay cho α , nhưng ta luôn luôn có :

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$

Do đó ta chỉ phải đổi dấu số hạng $\sin\alpha$.

Bước 1. Thực hiện chuyển $[U]$ từ hệ tọa độ Oxy sang hệ $O\xi\eta$.

Ta có :

$$\begin{pmatrix} U_1^* \\ V_1^* \\ \theta_1^* \\ U_2^* \\ V_2^* \\ \theta_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \\ \theta_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

Kết quả ta được :

$$U_1^* = \cos\alpha U_1 + \sin\alpha V_1$$

$$V_1^* = -\sin\alpha U_1 + \cos\alpha V_1$$

$$\theta_1^* = \theta_1$$

$$U_2^* = \cos\alpha U_2 + \sin\alpha V_2$$

$$V_2^* = -\sin\alpha U_2 + \cos\alpha V_2$$

$$\theta_2^* = \theta_2$$

Bước 2. Tính các thành phần lực [P*]

$$\begin{bmatrix} X_1^* \\ Q_1^* \\ M_1^* \\ X_2^* \\ Q_2^* \\ M_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EF}{l} & 0 & 0 & -\frac{EF}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EF}{l} & 0 & 0 & \frac{EF}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha U_1 + \sin\alpha V_1 \\ -\sin\alpha U_1 + \cos\alpha V_1 \\ \theta_1 \\ \cos\alpha U_2 + \sin\alpha V_2 \\ -\sin\alpha U_2 + \cos\alpha V_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

Thực hiện phép nhân ta được :

$$X_1^* = \frac{EF}{l} (\cos\alpha U_1 + \sin\alpha V_1) - \frac{EF}{l} (\cos\alpha U_2 + \sin\alpha V_2)$$

$$Q_1^* = \frac{12EI}{l^3} (-\sin\alpha U_1 + \cos\alpha V_1) + \frac{6EI}{l^2} \theta_1 - \frac{12EI}{l^3} (-\sin\alpha U_2 + \cos\alpha V_2) + \frac{6EI}{l^2} \theta_2$$

$$M_1^* = \frac{6EI}{l^2} (-\sin\alpha U_1 + \cos\alpha V_1) + \frac{4EI}{l} \theta_1 - \frac{6EI}{l^2} (-\sin\alpha U_2 + \cos\alpha V_2) + \frac{2EI}{l} \theta_2$$

$$X_2^* = -\frac{EF}{l} (\cos\alpha U_1 + \sin\alpha V_1) + \frac{EF}{l} (\cos\alpha U_2 + \sin\alpha V_2)$$

$$Q_2^* = -\frac{12EI}{l^3} (-\sin\alpha U_1 + \cos\alpha V_1) - \frac{6EI}{l^2} \theta_1 + \frac{12EI}{l^3} (-\sin\alpha U_2 + \cos\alpha V_2) - \frac{6EI}{l^2} \theta_2$$

$$M_2^* = \frac{6EI}{l^2} (-\sin\alpha U_1 + \cos\alpha V_1) + \frac{2EI}{l} \theta_1 - \frac{6EI}{l^2} (-\sin\alpha U_2 + \cos\alpha V_2) + \frac{4EI}{l} \theta_2$$

Bước 3. Đưa [P*] từ hệ tọa độ Oξη về tọa độ chung Oxy.

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Q_1 \\ M_1 \\ X_2 \\ Q_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1^* \\ Q_1^* \\ M_1^* \\ X_2^* \\ Q_2^* \\ M_2^* \end{bmatrix}$$

Ta có

$$X_1 = \cos\alpha X_1^* - \sin\alpha Q_1^*$$

$$Q_1 = \sin\alpha X_1^* + \cos\alpha Q_1^*$$

$$M_1 = M_1^*$$

$$X_2 = \cos\alpha X_2^* - \sin\alpha Q_2^*$$

$$Q_2 = \sin\alpha X_2^* + \cos\alpha Q_2^*$$

$$M_2 = M_2^*$$

$$\begin{aligned} X_1 = & \frac{EF}{l} (\cos^2\alpha U_1 + \sin\alpha \cos\alpha V_1) - \frac{EF}{l} (\cos^2\alpha U_2 + \sin\alpha \cos\alpha V_2) + \\ & + \frac{12EI}{l^3} (\sin^2\alpha U_1 - \cos\alpha \sin\alpha V_1) + \frac{6EI}{l^2} \theta_1 (-\sin\alpha) - \frac{12EI}{l^3} (\sin^2\alpha U_2 - \cos\alpha \sin\alpha V_2) + \\ & + \frac{6EI}{l^2} \theta_2 (-\sin\alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_1 = & \frac{EF}{l} (\cos\alpha \sin\alpha U_1 + \sin^2\alpha V_1) - \frac{EF}{l} (\sin\alpha \cos\alpha U_2 + \sin^2\alpha V_2) + \\ & + \frac{12EI}{l^3} (-\sin\alpha \cos\alpha U_1 + \cos^2\alpha V_1) + \frac{6EI}{l^2} \theta_1 \cos\alpha - \frac{12EI}{l^3} (-\sin\alpha \cos\alpha U_2 + \cos^2\alpha V_2) + \\ & + \frac{6EI}{l^2} \theta_2 \cos\alpha \end{aligned}$$

$$M_1 = \frac{6EI}{l^2} (-\sin\alpha U_1 + \cos\alpha V_1) - \frac{6EI}{l^2} (-\sin\alpha U_2 + \cos\alpha V_2) + \frac{4EI}{l} \theta_1 + \frac{2EI}{l} \theta_2$$

$$\begin{aligned} X_2 = & -\frac{EF}{l} (\cos^2\alpha U_1 + \sin\alpha \cos\alpha V_1) + \frac{EF}{l} (\cos^2\alpha U_2 + \sin\alpha \cos\alpha V_2) - \\ & - \frac{12EI}{l^3} (\sin^2\alpha U_1 - \cos\alpha \sin\alpha V_1) + \frac{6EI}{l^2} \theta_1 \sin\alpha + \frac{12EI}{l^3} (\sin^2\alpha U_2 - \cos\alpha \sin\alpha V_2) + \\ & + \frac{6EI}{l^2} \theta_2 \sin\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_2 = & -\frac{EF}{l} (\sin\alpha \cos\alpha U_1 + \sin^2\alpha V_1) + \frac{EF}{l} (\cos\alpha \sin\alpha U_2 + \sin^2\alpha V_2) - \\ & - \frac{12EI}{l^3} (-\sin\alpha \cos\alpha U_1 + \cos^2\alpha V_1) - \frac{6EI}{l^2} \theta_1 \cos\alpha + \frac{12EI}{l^3} (-\sin\alpha \cos\alpha U_2 + \cos^2\alpha V_2) \\ & - \frac{6EI}{l^2} \theta_2 \cos\alpha \end{aligned}$$

$$M_2 = \frac{6EI}{l^2} (-\sin\alpha U_1 + \cos\alpha V_1) + \frac{2EI}{l} \theta_1 - \frac{6EI}{l^2} (-\sin\alpha U_2 + \cos\alpha V_2) + \frac{4EI}{l} \theta_2$$

Hay viết lại dưới dạng :

$$\begin{aligned} X_1 = & \left(\frac{EF}{l} \cos^2 \alpha + \frac{12EI}{l^3} \sin^2 \alpha \right) U_1 + \left(\frac{EF}{l} \sin \alpha \cos \alpha - \frac{12EI}{l^3} \cos \alpha \sin \alpha \right) V_1 \\ & - \frac{6EI}{l^2} \sin \alpha \cdot \theta_1 - \left(\frac{EF}{l} \cos^2 \alpha + \frac{12EI}{l^3} \sin^2 \alpha \right) U_2 \\ & - \left(\frac{EF}{l} \sin \alpha \cos \alpha - \frac{12EI}{l^3} \cos \alpha \sin \alpha \right) V_2 - \frac{6EI}{l^2} \sin \alpha \cdot \theta_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_1 = & \left(\frac{EF}{l} \cos \alpha \sin \alpha - \frac{12EI}{l^3} \sin \alpha \cos \alpha \right) U_1 + \left(\frac{EF}{l} \sin^2 \alpha + \frac{12EI}{l^3} \cos^2 \alpha \right) V_1 + \\ & + \frac{6EI}{l^2} \cos \alpha \cdot \theta_1 + \left(-\frac{EF}{l} \sin \alpha \cos \alpha + \frac{12EI}{l^3} \sin \alpha \cos \alpha \right) U_2 \\ & + \left(-\sin^2 \alpha \frac{EF}{l} - \frac{12EI}{l^3} \cos^2 \alpha \right) V_2 + \frac{6EI}{l^3} \cos \alpha \cdot \theta_2 \end{aligned}$$

$$M_1 = -\frac{6EI}{l^2} \sin \alpha \cdot U_1 + \frac{6EI}{l^2} \cos \alpha \cdot V_1 + \frac{4EI}{l} \theta_1 + \frac{6EI}{l^2} \sin \alpha U_2 - \frac{6EI}{l^2} \cos \alpha V_2 + \frac{2EI}{l^2} \sin \alpha \theta_1$$

$$\begin{aligned} X_2 = & \left(-\frac{EF}{l} \cos^2 \alpha - \frac{12EI}{l^3} \sin^2 \alpha \right) U_1 + \left(-\frac{EF}{l} \sin \alpha \cos \alpha + \frac{12EI}{l^3} \cos \alpha \sin \alpha \right) V_1 + \\ & \frac{6EI}{l^2} \sin \alpha \cdot \theta_1 + \left(\frac{EF}{l} \cos^2 \alpha + \frac{12EI}{l^3} \sin^2 \alpha \right) U_2 + \left(\frac{EF}{l} \sin \alpha \cos \alpha - \frac{12EI}{l^3} \cos \alpha \sin \alpha \right) V_2 + \\ & + \frac{6EI}{l^2} \sin \alpha \cdot \theta_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_2 = & \left(-\frac{EF}{l} \cos \alpha \sin \alpha + \frac{12EI}{l^3} \sin \alpha \cos \alpha \right) U_1 + \left(-\frac{EF}{l} \sin^2 \alpha - \frac{12EI}{l^3} \cos^2 \alpha \right) V_1 \\ & - \frac{6EI}{l^2} \cos \alpha \cdot \theta_1 + \left(\frac{EF}{l} \sin \alpha \cos \alpha - \frac{12EI}{l^3} \sin \alpha \cos \alpha \right) U_2 \\ & + \left(\frac{EF}{l} \sin^2 \alpha + \frac{12EI}{l^3} \cos^2 \alpha \right) V_2 - \frac{6EI}{l^2} \cos \alpha \cdot \theta_2 \end{aligned}$$

$$M_2 = -\frac{6EI}{l^2} \sin \alpha \cdot U_1 + \frac{6EI}{l^2} \cos \alpha \cdot V_2 + \frac{2EI}{l} \theta_1 + \frac{6EI}{l^2} \sin \alpha U_2 - \frac{6EI}{l^2} \cos \alpha V_2 + \frac{4EI}{l} \theta_2$$

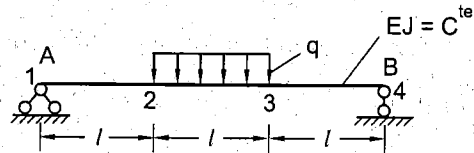
Nếu đặt $m = \sqrt{\frac{I}{F}}$, $\cos \alpha = \gamma$, $\sin \alpha = \mu$ thì ma trận độ cứng [K] sẽ là :

$$[K] = \frac{EF}{l} \begin{bmatrix} \gamma^2 + \mu \frac{12m^2}{l^2} & \mu\gamma - \mu\gamma \frac{12m^2}{l^2} & -\mu \frac{6m^2}{l} & -\gamma^2 - \mu^2 \frac{12m^2}{l^2} & -\gamma\mu + \gamma\mu \frac{12m^2}{l^2} & -\mu \frac{6m^2}{l} \\ \mu\gamma - \mu\gamma \frac{12m^2}{l^2} & \mu^2 + \gamma^2 \frac{12m^2}{l^2} & \gamma \frac{6m^2}{l} & -\gamma\mu + \gamma\mu \frac{12m^2}{l^2} & -\mu^2 - \gamma^2 \frac{12m^2}{l^2} & \gamma \frac{6m^2}{l} \\ -\mu \frac{6m^2}{l} & \gamma \frac{6m^2}{l} & 4m^2 & \mu \frac{6m^2}{l} & -\gamma \frac{6m^2}{l} & 2m^2 \\ -\gamma^2 - \mu^2 \frac{12m^2}{l^2} & -\mu\gamma + \gamma\mu \frac{12m^2}{l^2} & \mu \frac{6m^2}{l} & \gamma^2 + \mu^2 \frac{12m^2}{l^2} & -\gamma\mu - \gamma\mu \frac{12m^2}{l^2} & \mu \frac{6m^2}{l} \\ -\mu\gamma + \gamma\mu \frac{12m^2}{l^2} & -\mu^2 - \gamma^2 \frac{12m^2}{l^2} & -\gamma \frac{6m^2}{l} & \mu\gamma - \gamma\mu \frac{12m^2}{l^2} & \mu^2 + \gamma^2 \frac{12m^2}{l^2} & -\gamma \frac{6m^2}{l} \\ -\mu \frac{6m^2}{l} & \gamma \frac{6m^2}{l} & 2m^2 & \mu \frac{6m^2}{l} & -\gamma \frac{6m^2}{l} & 4m^2 \end{bmatrix}$$

Ví dụ 1. Cho dầm chịu lực như hình vẽ (h.18-10). Xác định ma trận độ cứng của dầm và từ đó xác định độ võng và góc xoay tại các điểm nút.

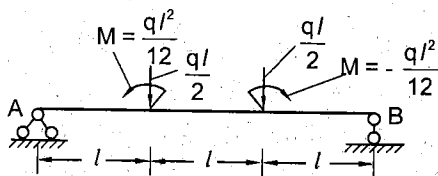
Bài giải

Ta chia dầm thành ba đoạn thanh liên tiếp 12, 23, 34. Các đoạn dầm đều có chiều dài là l . Ma trận cứng của mỗi phần tử là như sau :



Hình 18-10

$$[K] = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix}$$



Hình 18-11

Ta chuyển tải trọng phân bố thành tải trọng tương đương tập trung tại nút 2 và 3. Nghĩa là chuyển sang giải quyết bài toán tương đương như trên hình 18-11. Các tải trọng tương đương được tính với công thức (25).

Ma trận cứng được xác định như sau :

$$\begin{pmatrix} Q_1^1 \\ M_1^1 \\ Q_2 \\ M_2 \\ Q_3 \\ M_3 \\ Q_4^3 \\ M_4^3 \end{pmatrix} = \frac{EJ}{l^3} \begin{pmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -6l & 12+12 & 6l-6l & -12 & 6l & 0 & 0 \\ 6l & 2l^2 & 6l-6l & 4l^2+4l^2 & -6l & 2l^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & -6l & 12+12 & 6l-6l & -12 & 6l \\ 0 & 0 & 6l & 2l^2 & 6l-6l & 4l^2+4l^2 & -6l & 2l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & -6l & 12 & -6l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^1 \\ \theta_1^1 \\ V_2 \\ \theta_2 \\ V_3 \\ \theta_3 \\ V_4^3 \\ \theta_4^3 \end{pmatrix}$$

Ta có các điều kiện biên như sau :

$$M_1^1 = 0 \quad M_4^3 = 0 \quad V_1^1 = 0 \quad V_4^3 = 0$$

$$Q_2 = -\frac{ql}{2}, \quad Q_3 = -\frac{ql}{2}$$

$$M_2 = \frac{ql^2}{12}, \quad M_3 = -\frac{ql^2}{12}$$

Thay các điều kiện đó vào, được một hệ phương trình như sau :

$$\begin{pmatrix} Q_1^1 \\ 0 \\ -\frac{ql}{2} \\ \frac{ql^2}{12} \\ -\frac{ql}{2} \\ \frac{ql^2}{12} \\ Q_4^3 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{EJ}{l^3} \begin{pmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -6l & 24 & 0 & -12 & 6l & 0 & 0 \\ 6l & 2l^2 & 0 & 8l^2 & -6l & 2l^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & -6l & 24 & 0 & -12 & 6l \\ 0 & 0 & 6l & 2l^2 & 0 & 8l^2 & -6l & 2l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & -6l & 12 & -6l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \theta_1^1 \\ V_2 \\ \theta_2 \\ V_3 \\ \theta_3 \\ 0 \\ \theta_4^3 \end{pmatrix}$$

Như vậy ta có 8 phương trình với 8 ẩn số. Chú ý thấy rằng Q_1^1 và Q_4^3 là phản lực ở gối tựa, các trị số này được tính từ các biến dạng $\theta_1^1, V_2, \theta_2, V_3, \theta_3$ và θ_4^3 do vậy có thể tách hai phương trình đó ra khỏi hệ. Vậy ta chỉ còn sáu phương trình sau đây :

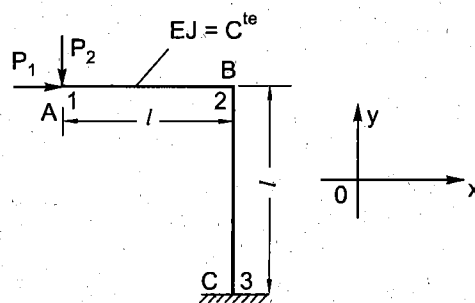
$$\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{ql}{2} \\ \frac{ql^2}{12} \\ -\frac{ql}{2} \\ -\frac{ql^2}{12} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 4l^2 & -6l & 2l^2 & 0 & 0 & 0 \\ -6l & 24 & 0 & -12 & 6l & 0 \\ 2l^2 & 0 & 8l^2 & -6l & 2l^2 & 0 \\ 0 & -12 & 6l & 24 & 0 & 6l \\ 0 & 6l & 2l^2 & 0 & 8l^2 & 2l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 6l & 2l^2 & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1^1 \\ V_2 \\ \theta_2 \\ V_3 \\ \theta_3 \\ \theta_4^3 \end{bmatrix}$$

Giải hệ phương trình đó sẽ tìm thấy θ_1^1 , V_2 , θ_2 , V_3 , θ_3 và θ_4^3 . Sau khi đã có các biến dạng đó ta sẽ tìm được Q_1^1 và Q_4^3 .

Đến đây xem như bài toán đã giải xong.

Ví dụ 2. Cho khung chịu lực như hình 18-12. Thiết lập ma trận cứng của khung từ đó tính độ võng và góc xoay tại đầu tự do.

Cho biết $EJ = C^{te}$. Các thanh có chiều dài bằng l .



Hình 18-12

Bài giải

Ta phải chọn hệ trục tọa độ chung cho cả khung. Ví dụ chọn hệ trục Oxy như hình vẽ.

Như vậy đối với thanh AB không phải quay trục. Ma trận cứng của thanh sẽ là :

$$[K_{AB}] = \frac{EF}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12m^2}{l^2} & \frac{6m^2}{l} & 0 & -\frac{12m^2}{l^2} & \frac{6m^2}{l} \\ 0 & \frac{6m^2}{l} & 4m^2 & 0 & -\frac{6m^2}{l} & 2m^2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12m^2}{l^2} & -\frac{6m^2}{l} & 0 & \frac{12m^2}{l^2} & \frac{6m^2}{l} \\ 0 & \frac{6m^2}{l} & 2m^2 & 0 & -\frac{6m^2}{l} & 4m^2 \end{bmatrix}$$

Đối với thanh BC ta phải xoay trục tọa độ góc quay $\alpha = 90^\circ$ như vậy $\cos\alpha = \gamma = 0$ và $\sin\alpha = \mu = 1$. Vậy ma trận cứng của thanh là :

$$[K_{BC}] = \frac{EF}{l} \begin{bmatrix} \frac{12m^2}{l^2} & 0 & -\frac{6m^2}{l} & -\frac{12m^2}{l^2} & 0 & -\frac{6m^2}{l} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -\frac{6m^2}{l} & 0 & 4m^2 & \frac{6m^2}{l} & 0 & 2m^2 \\ -\frac{12m^2}{l^2} & 0 & \frac{6m^2}{l} & \frac{12m^2}{l^2} & 0 & \frac{6m^2}{l} \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{6m^2}{l} & 0 & 2m^2 & \frac{6m^2}{l} & 0 & 4m^2 \end{bmatrix}$$

Ma trận của khung được ghép từ hai ma trận trên với điểm chung là 2.

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Q_1 \\ M_1 \\ X_2 \\ Q_2 \\ M_2 \\ X_3 \\ Q_3 \\ M_3 \end{bmatrix} = \frac{EJ}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12m^2}{l^2} & \frac{6m^2}{l} & 0 & -\frac{12m^2}{l^2} & \frac{6m^2}{l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6m^2}{l} & 4m^2 & 0 & -\frac{6m^2}{l} & 2m^2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 + \frac{12m^2}{l^2} & 0 & -\frac{6m^2}{l} & -\frac{12m^2}{l^2} & 0 & -\frac{6m^2}{l} \\ 0 & -\frac{12m^2}{l^2} & -\frac{6m^2}{l} & 0 & 1 + \frac{12m^2}{l^2} & -\frac{6m^2}{l} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{6m^2}{l} & 2m^2 & -\frac{6m^2}{l} & -\frac{6m^2}{l} & 8m^2 & \frac{6m^2}{l} & 0 & 2m^2 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{12m^2}{l^2} & 0 & \frac{6m^2}{l} & \frac{12m^2}{l^2} & 0 & \frac{6m^2}{l} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{6m^2}{l} & 0 & 2m^2 & \frac{6m^2}{l} & 0 & 4m^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ \theta_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ \theta_2 \\ U_3 \\ V_3 \\ \theta_3 \end{bmatrix}$$

Điều kiện biên :

$$\begin{array}{llll} X_1 = P_1 & X_2 = 0 & X_3 \text{ ẩn số} & U_3 = 0 \\ Q_1 = -P_2 & Q_2 = 0 & Q_3 \text{ ẩn số} & V_3 = 0 \\ M_1 = 0 & M_2 = 0 & M_3 \text{ ẩn số} & \theta_3 = 0 \end{array}$$

Vì U_3, V_3, θ_3 là bằng 0 nên ba cột cuối của ma trận có thể bỏ được các phản lực X_3, Q_3 và M_3 được tính bởi các chuyển vị khác do đó có thể thu gọn phương trình như sau :

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ -P_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{EF}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12m^2}{l^2} & \frac{6m^2}{l} & 0 & -\frac{12m^2}{l^2} & \frac{6m^2}{l} \\ 0 & \frac{6m^2}{l} & 4m^2 & 0 & -\frac{6m^2}{l} & 2m^2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 + \frac{12m^2}{l^2} & 0 & -\frac{6m^2}{l} \\ 0 & -\frac{12m^2}{l^2} & -\frac{6m^2}{l} & 0 & 1 + \frac{12m^2}{l^2} & -\frac{6m^2}{l} \\ 0 & \frac{6m^2}{l} & 2m^2 & -\frac{6m^2}{l} & -\frac{6m^2}{l} & 8m^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ \theta_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

Như vậy chúng ta có một hệ 6 phương trình sáu ẩn số. Bài toán được xem là đã giải xong. Các phản lực X_3, Q_3 và M_3 được tính với các biểu thức :

$$X_3 = \left(-\frac{12m^2}{l^2} \cdot U_2 + \frac{6m^2}{l} \cdot \theta_2 \right) \frac{EF}{l}$$

$$Q_3 = -V_2 \frac{EF}{l}$$

$$M_3 = \left(-\frac{6m^2}{l} \cdot U_2 + 2m^2 \theta_2 \right) \frac{EF}{l}$$

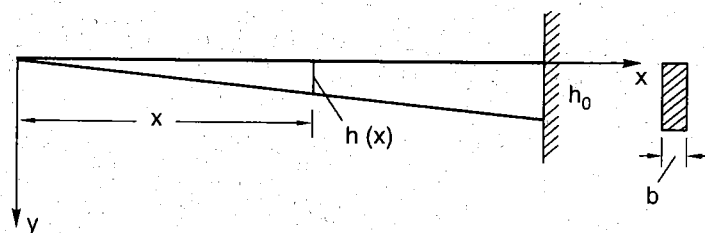
Ví dụ 3. Xác định ma trận cứng của dầm chịu lực như hình 18-13.

Bài giải

Ma trận cứng $[K]$ được xác định từ biểu thức (11)

Ta có :

$$[K] = \int_0^l EI \begin{bmatrix} \frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3} \\ \frac{4}{l} - \frac{6x}{l^2} \\ -\frac{6}{l^2} + \frac{12x}{l^3} \\ \frac{2}{l} - \frac{6x}{l^2} \end{bmatrix} \left[\left(\frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3} \right) \left(\frac{4}{l} - \frac{6x}{l^2} \right) \left(-\frac{6}{l^2} + \frac{12x}{l^3} \right) \left(\frac{2}{l} - \frac{6x}{l^2} \right) \right] dx$$



Hình 18-13

Như vậy $[K]$ là ma trận vuông có bốn hàng bốn cột :

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix}$$

Ta có :

$$K_{11} = \int_0^l E.I. \left(\frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3} \right)^2 dx$$

Vì mặt cắt có chiều cao thay đổi nên phải tính I theo x . Ta có :

$$\frac{h(x)}{h_0} = \frac{x}{l}$$

Vậy :

$$h(x) = \frac{h_0}{l} x$$

Do đó :

$$\begin{aligned} I &= \frac{b.h^3(x)}{12} = \frac{b}{12} \left(\frac{h_0}{l} x \right)^3 \\ &= \frac{bh_0^3}{12l^3} x^3 \end{aligned}$$

Thay vào K_{11} ta có :

$$K_{11} = \int_0^l \frac{E.bh_0^3}{12l^3} \left[\frac{36}{l^4} + \frac{12^2.x^2}{l^6} - \frac{2.6}{l^2} \cdot \frac{12.x}{l^3} \right] x^3 dx$$

$$K_{11} = \frac{E.bh_0^3}{12l^3} \int_0^l \left(\frac{36x^3}{l^4} + \frac{12^2.x^5}{l^6} - \frac{2.6.12.x^4}{l^5} \right) dx$$

$$K_{11} = \frac{E.bh_0^3}{12l^3} \left[\frac{36x^4}{4l^4} + \frac{12^2.x^6}{6l^6} - \frac{2.6.12.x^5}{5l^5} \right]_0^l$$

$$K_{11} = \int_0^l EI \left(\frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3} \right)^2 dx$$

Với

$$I = \frac{bh_0^3}{12l^3} x^3$$

$$\begin{aligned}
 K_{11} &= E \frac{bh_o^3}{12l^3} \int_0^l \left(\frac{36}{l^4} x^3 + \frac{12^2}{l^6} x^5 - 2 \cdot \frac{6}{l^2} \frac{12}{l^3} x^4 \right) dx \\
 &= \frac{bh_o^3}{12l^3} \left[\frac{36}{l^4} \cdot \frac{l^4}{4} + \frac{12^2}{l^6} \cdot \frac{l^6}{6} - 2 \cdot \frac{6}{l^2} \cdot \frac{12}{l^3} \cdot \frac{l^5}{5} \right] \\
 &= \frac{bh_o^3}{12l^3} \left[\frac{36}{4} + \frac{12^2}{6} - 2 \cdot \frac{6 \cdot 12}{5} \right] = \frac{bh_o^3}{12l^3} \cdot 4,2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_{12} &= E \frac{bh_o^3}{12l^3} \int_0^l x^3 \left(\frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3} \right) \left(\frac{4}{l} - \frac{6x}{l^2} \right) dx \\
 &= \frac{bh_o^3}{12l^3} \left(\frac{6}{l^2} \cdot \frac{4}{l} \cdot \frac{x^4}{4} - \frac{6}{l^2} \frac{6}{l^2} \frac{x^5}{5} - \frac{4}{l} \cdot \frac{12}{l^3} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{12}{l^3} \cdot \frac{6}{l^2} \cdot \frac{x^6}{6} \right) \Bigg|_0^l \\
 &= \frac{bh_o^3}{12l^3} \left[6l - \frac{36}{5}l - \frac{4 \cdot 12}{5}l + \frac{12 \cdot 6}{6}l \right] \\
 &= \frac{bh_o^3}{12l^3} (6 - 7,2 - 9,6 + 12)l \\
 &= \frac{bh_o^3}{12l^3} \cdot 1,2l
 \end{aligned}$$

$$K_{13} = -E \frac{bh_o^3}{12l^3} \int_0^l x^3 \left(\frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3} \right)^2 dx = -\frac{Ebh_o^3}{12l^3} \cdot 4,2.$$

$$\begin{aligned}
 K_{14} &= E \frac{bh_o^3}{12l^3} \int_0^l x^3 \left(\frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3} \right) \left(\frac{2}{l} - \frac{6x}{l^2} \right) dx \\
 &= E \frac{bh_o^3}{12l^3} \left(\frac{6}{l^2} \cdot \frac{2}{l} \cdot \frac{x^4}{4} - \frac{6 \cdot 6 \cdot x^5}{l^4 \cdot 5} - \frac{2}{l} \cdot \frac{12}{l^3} \cdot \frac{l^5}{5} + \frac{6}{l^2} \cdot \frac{12}{l^3} \cdot \frac{x^6}{6} \right) \Bigg|_0^l \\
 &= E \cdot \frac{bh_o^3}{12l^3} \cdot 3l
 \end{aligned}$$

$$K_{21} = K_{12} = 1,2l$$

$$K_{22} = 0,4l^2$$

$$K_{23} = -1,2l$$

$$K_{24} = 0,8l^2$$

$$K_{31} = -K_{11}$$

$$K_{32} = -K_{12} = -1,2l$$

$$K_{33} = K_{11}$$

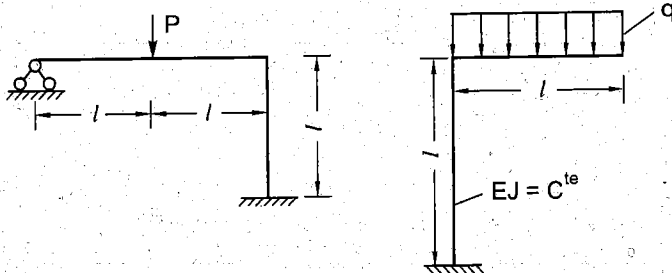
$$K_{34} = -K_{14}$$

Vậy ta có ma trận độ cứng [K] như sau :

$$[K] = \frac{Eb \cdot h_o^3}{12l^3} \begin{bmatrix} 4,2 & 1,2l & -4,2 & 3l \\ 1,2l & 0,4l^2 & -1,2l & 0,8l \\ -4,2 & -1,2l & 4,2 & -3l \\ 3l & 0,8l^2 & -3l & 2,2l^2 \end{bmatrix}$$

Bài tập

18.1. Thiết lập ma trận cứng của các khung chịu lực như hình vẽ 18-14.



Ứng dụng số :

$$P = 600\text{N}$$

$$l = 1\text{m}$$

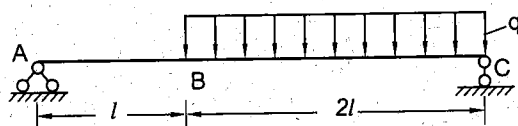
$$F = 1000\text{mm}^2$$

$$J = 10^5\text{mm}^4$$

Hình 18-14

18.2. Cho dầm chịu lực như hình 18-15, thiết lập ma trận cứng của dầm. Cho biết

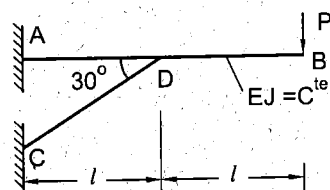
$$EI = C^{tc}$$



Hình 18-15

18.3. Thiết lập ma trận cứng của khung chịu lực như hình 18-16.

Các thanh AB và CD có cùng kích thước mặt cắt ngang và cùng một loại nguyên vật liệu.



Hình 18-16

§19-1. KHÁI NIỆM

Trong các chương trước đây chúng ta chỉ mới xét đến tải trọng tĩnh, nghĩa là tải trọng tác động lên hệ được tăng lên một cách từ từ để không xuất hiện lực quán tính. Trong thực tế nhiều khi tải trọng tăng lên đột ngột, như khi hệ bị va chạm, hay biến đổi theo thời gian như trong hệ dao động hay trong các chuyển động có gia tốc. Những trường hợp đó ta gọi là tải trọng động.

Nhiều công trình hay chi tiết được tính với một hệ số an toàn rất cao đối với tải trọng tĩnh nhưng vẫn bị phá hỏng vì tải trọng động. Ngược lại có những kết cấu hay chi tiết, thoạt nhìn tưởng rằng yếu ớt nhưng trong thực tế lại có khả năng làm việc lâu dài dưới tác dụng của tải trọng động. Vì vậy đòi hỏi người thiết kế phải chú ý nghiên cứu về lĩnh vực này.

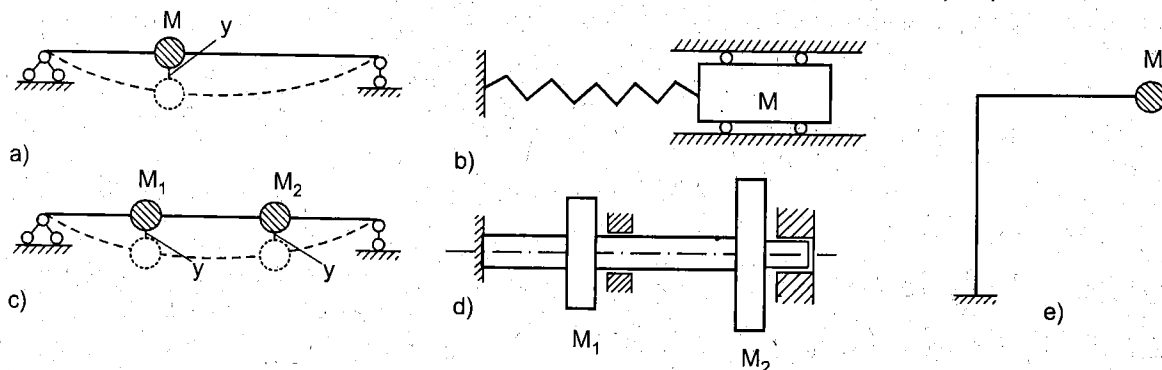
Trước hết ta hãy xét đến trường hợp dao động của hệ đàn hồi.

§19-2. BẬC TỰ DO

Ta có định nghĩa về bậc tự do của hệ đàn hồi khi dao động như sau :

Bậc tự do của một hệ đàn hồi khi dao động là thông số độc lập để xác định vị trí của hệ.

Ví dụ các hệ trên hình 19-1a, b nếu bỏ qua trọng lượng bản thân của dầm hay của lò xo, xem chúng là những liên kết đàn hồi không có khối lượng và xem bài toán là phẳng thì đó là những hệ có một bậc tự do vì để xác định vị trí của hệ ta chỉ cần biết độ võng y hay hoành độ x của M . Với các hệ trên hình 19-1c, d để xác định được vị trí của hệ phải biết các độ võng y_1, y_2 của M_1, M_2 và các góc xoay φ_1, φ_2 của các bánh xe M_1, M_2 . Các hệ đó là các hệ có hai bậc tự do. Với hệ trên hình (h.19-1e), tuy ta chỉ có một khối lượng M , nhưng để xác định được vị trí trọng tâm của M ta phải có hai tọa độ. Nếu như mômen quán tính của M đối với trọng tâm là không đáng kể thì đó là hệ có hai bậc tự do, nếu còn



Hình 19-1

phải để ý đến mômen quán tính của M đối với trọng tâm của M thì đó là 3 bậc tự do vì ngoài hai tọa độ thẳng ta còn phải để ý đến sự quay của M khi hệ dao động trong mặt phẳng của khung.

Số bậc tự do là tùy thuộc vào sơ đồ lựa chọn để tính : ví dụ khi không thể bỏ qua trọng lượng bản thân của dầm thì hệ sẽ trở thành vô số bậc tự do. Cách giải là luôn luôn tìm cách đưa hệ về một hệ có bậc tự do ít hơn để tính dễ hơn. Dĩ nhiên với cách đó ta chỉ đạt được kết quả gần đúng.

§19-3. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN DAO ĐỘNG

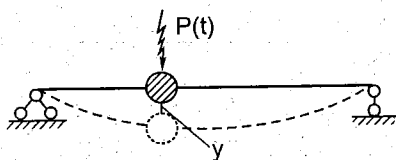
Giả sử xét hệ đàn hồi có một bậc tự do. Ví dụ hệ trên hình 19-2. Ta xem dầm như một liên kết đàn hồi không có khối lượng.

Độ võng y của M là do các lực sau đây gây nên :

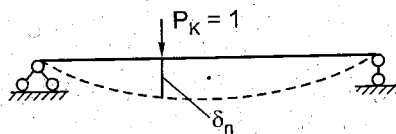
- Ngoại lực $P(t)$ gây nên dao động. Ta gọi lực này là lực kích thích.
- Lực quán tính $\vec{F}_i$ do gia tốc $\ddot{y}$ của M gây nên. Lực quán tính đó, luôn luôn ngược chiều với gia tốc. Trị số của $\vec{F}_i$ là :

$$F_i = -M\ddot{y}$$

- Lực cản $\vec{F}_r$ do môi trường gây nên. Một cách gần đúng ta có thể xem lực cản là tỉ lệ với vận tốc $\dot{y}$ của M.



Hình 19-2



Hình 19-3

Trị số của $\vec{F}_r$ là :

$$F_r = -\beta \dot{y}$$

trong đó β là hệ số tỉ lệ. Nếu gọi δ_{11} là chuyển vị theo phương chuyển động của M do lực đơn vị gây nên (h.19-3) thì y được tính với biểu thức :

$$y = \delta_{11}[P(t) - M\ddot{y} - \beta \dot{y}]$$

Hay có thể viết lại dưới dạng :

$$\ddot{y} + 2\alpha \dot{y} + \omega^2 y = \frac{P(t)}{M} \quad (19-1)$$

trong đó $2\alpha = \frac{\beta}{M}$ là hệ số tương trưng cho lực cản của môi trường, $\omega^2 = \frac{1}{\delta_{11}M}$ có một ý nghĩa vật lý rõ rệt mà ta sẽ nói trong mục tới.

Nghiệm riêng của phương trình (19-1) tùy thuộc dạng hàm $P(t)$.

Ở đây ta chỉ xét trường hợp hàm $P(t)$ là một hàm số điều hòa dưới dạng :

$$P(t) = P_0 \sin \Omega t \quad (19-2)$$

P_0 được gọi là biên độ của lực kích thích ;

Ω là số lần dao động của lực kích thích trong 2π giây, nên gọi là tần số vòng của lực kích thích.

Để giải hệ (19-1) phải tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân thuần nhất không có vế phải vì vậy ta xét các trường hợp riêng sau đây :

§19-4. DAO ĐỘNG TỰ DO

Ta giả thiết sau khi $P(t)$ kích thích cho hệ dao động xong thì bị triệt tiêu. Nghĩa là $P(t)$ chỉ tồn tại một khoảng khắc rất bé ban đầu, sau đó ta có thể xem $P(t) = 0$. Sự dao động của hệ là do lực đàn hồi sinh ra và được gọi là dao động tự do.

a) *Dao động tự do không có lực cản.* Xem lực cản của môi trường là bằng không, nghĩa là $\alpha = 0$. Phương trình vi phân dao động có dạng :

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0 \quad (19-3)$$

Nghiệm của phương trình là :

$$y(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (19-4)$$

A là biên độ của dao động, φ là pha ban đầu. Các trị số đó được xác định từ điều kiện ban đầu của dao động. Từ phương trình (19-4) ta thấy rõ ý nghĩa của ω , đó là tần số vòng của dao động, ω được gọi là tần số vòng riêng của hệ. Trị số của ω được xác định từ biểu thức :

$$\omega^2 = \frac{1}{M\delta_{11}}$$

hay

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{M\delta_{11}}} = \sqrt{\frac{g}{Q\delta_{11}}} = \sqrt{\frac{g}{\Delta t}} \quad (19-5)$$

trong đó : g là gia tốc trọng trường : Q là trọng lượng của M và Δt là độ võng tĩnh do Q gây nên đối với hệ đã cho.

Chu kỳ T của dao động sẽ là :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{\Delta t}{g}} \quad (19-6)$$

và tần số f của dao động là $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (19-6b)$

b) *Dao động tự do có lực cản*

Phương trình vi phân dao động có dạng :

$$\ddot{y} + 2\alpha \dot{y} + \omega^2 y = 0 \quad (19-7)$$

Nghiệm tổng quát của phương trình này là :

$$y(t) = Ae^{-\alpha \cdot t} \sin(\omega_1 t + \varphi_1)$$

ω_1 và φ_1 là tần số vòng riêng của hệ khi kể đến lực cản và góc pha ban đầu của dao động.

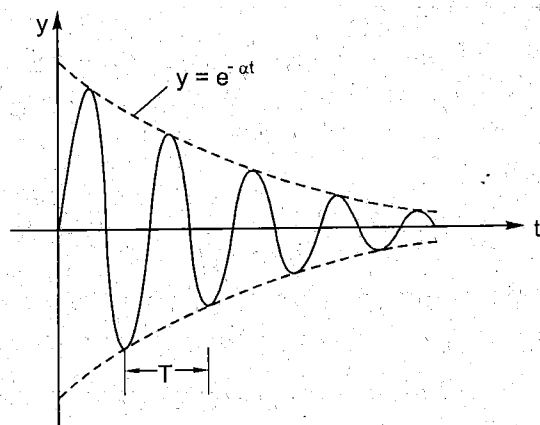
Tương quan giữa ω và ω_1 như sau :

$$\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \alpha^2} \quad (19-8)$$

Ta thấy ω_1 bé hơn ω . Biên độ của dao động là một hàm số phụ thuộc theo thời gian $Ae^{-\alpha \cdot t}$ nghĩa là biên độ càng ngày càng nhỏ đi. Sau mỗi chu kì, biên độ đó sẽ nhỏ đi với một hệ số là :

$$\frac{e^{-\alpha t}}{e^{-\alpha(t+T)}} = e^{\alpha T} = \text{const}$$

Ta nhận thấy dao động tắt rất nhanh. Đồ thị của dao động được biểu diễn như trên hình 19-4.



Hình 19-4

§19-5. DAO ĐỘNG CƯỜNG BỨC VỚI $P(t) = P_0 \sin \Omega t$

Phương trình vi phân dao động có dạng :

$$\ddot{y} + 2\alpha \dot{y} + \omega^2 y = \frac{P_0}{M} \sin \Omega t \quad (19-9)$$

Nghiệm tổng quát sẽ là tổng của một nghiệm riêng và nghiệm tổng quát của phương trình vi phân thuần nhất không vế phải. Để hệ có dao động ta chọn nghiệm riêng dưới dạng :

$$y_1 = C_1 \sin \Omega t + C_2 \cos \Omega t \quad (19-10)$$

Lấy đạo hàm liên tiếp của y đối với t và thay vào (19-9) ta xác định được các hằng số C_1 và C_2 như sau :

$$C_1 = \frac{P_0}{M} \cdot \frac{\omega^2 - \Omega^2}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\alpha^2 \Omega^2}$$

$$C_2 = -\frac{P_0}{M} \cdot \frac{2\alpha \Omega}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\alpha^2 \Omega^2}$$

Đặt

$$\sin \psi = \frac{2\alpha \Omega}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\alpha^2 \Omega^2}}$$

$$\cos \psi = \frac{\omega^2 - \Omega^2}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\alpha^2 \Omega^2}}$$

và thay $\delta_{11} = \frac{1}{M\omega^2}$ thì biểu thức y_1 có dạng :

$$y_1 = A_1 \sin(\Omega t - \psi) = \frac{P_0 \delta_{11}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{4\alpha^2 \Omega^2}{\omega^4}}} \sin(\Omega t - \Psi)$$

Nghiệm toàn phần sẽ là : $y = Ae^{-\alpha t} \sin(\omega_1 t + \varphi) + y_1$

Nghiệm đó biểu diễn hai dao động. Số hạng đầu biểu diễn dao động tự do tắt dần. Số hạng thứ hai biểu diễn dao động cưỡng bức gây ra do lực kích thích. Dao động tự do sẽ mất đi sau một thời gian nhất định, lúc đó sẽ dao động theo tần số Ω của lực kích thích.

Biên độ dao động là :

$$A_1 = \frac{P_0 \delta_{11}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{4\alpha^2 \Omega^2}{\omega^4}}}$$

Tích số $P_1 \delta_{11}$ biểu diễn chuyển vị do biên độ của lực kích thích đặt một cách tĩnh gây nên tại mặt cắt mang khối lượng M theo phương dao động. Kí hiệu chuyển vị đó là y_t và đặt :

$$k_d = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{4\alpha^2 \Omega^2}{\omega^4}}} \quad (19-11)$$

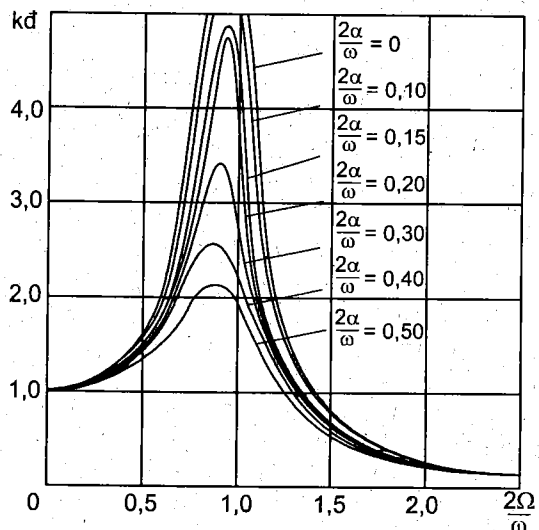
ta có thể viết :

$$y_d = y_t k_d \quad (19-12)$$

Vậy : *Độ võng động bằng độ võng tĩnh nhân với hệ số k_d .*

Hệ số động phụ thuộc vào tỉ số $\frac{\Omega}{\omega}$ và hệ số α . Mối tương quan đó được biểu diễn trên hình 19-5.

Khi $\frac{\Omega}{\omega} = 1$ tức là khi tần số của lực kích thích trùng với tần số dao động riêng của hệ thì ta có hiện tượng cộng hưởng. Khi $\alpha = 0$ thì k_d sẽ tiến tới vô cùng và khi $\alpha \neq 0$ thì k_d sẽ có trị số cực đại hữu hạn. Khi đó độ võng động lớn hơn rất nhiều so với độ võng tĩnh và do đó kết cấu hay công trình dễ bị phá hỏng. Nhìn qua các đường biểu diễn chúng ta nhận thấy hiện tượng cộng hưởng hình thành cả một miền khi tần số lực kích thích không



Hình 19-5

khác nhiều so với tần số dao động riêng của hệ. Ngược lại tỉ số $\frac{\Omega}{\omega}$ tăng lên thì hệ số động còn nhỏ hơn cả đơn vị, do đó, người ta có thể giảm độ cứng của công trình để giảm tần số vòng riêng của hệ hay tăng tần số của lực kích thích lên. Khi đóng mở máy, một lúc nào đó tần số của lực kích thích có thể trùng với tần số riêng, cần tăng nhanh tốc độ máy để làm tăng tần số của lực kích thích làm cho hiện tượng cộng hưởng không kịp xảy ra.

Người ta cũng thường dùng các bộ phận giảm chấn để tăng độ cản α nếu như hệ phải làm việc trong miền cộng hưởng lâu dài. Ta thấy tỉ số $\frac{\Omega}{\omega}$ có trị số lớn hơn 2 thì những đường cong k_d sẽ trùng nhau. Lúc đó có thể xem $\alpha = 0$ và trị số của k_d sẽ là :

$$k_d = \frac{1}{\left| 1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} \right|} \quad (19-13)$$

Biết hệ số k_d ta có thể tìm được ứng suất động bằng các biểu thức sau đây :

$$\begin{aligned} \sigma_d &= k_d \sigma_t \\ \tau_d &= k_d \tau_t \end{aligned} \quad (19-14)$$

trong đó σ_d và τ_d là ứng suất do tải trọng động gây nên, σ_t và τ_t là ứng suất do biên độ của lực kích thích gây nên với giả thiết lực này được đặt một cách tĩnh lên hệ. Nếu trên hệ còn có các tải trọng tĩnh khác tác dụng trước khi dao động thì ứng suất toàn phần trên mặt cắt nào đó là tổng ứng suất động và ứng suất do tải trọng tĩnh đó gây nên.

Ví dụ 1. Một động cơ điện có trọng lượng $Q = 24.000\text{N}$ đặt trên hai dầm chữ I : Số hiệu 24a, dầm dài 3m.

1. Tính tần số vòng riêng của hệ. Không kể đến trọng lượng bản thân của dầm.

2. Tính ứng suất lớn nhất trên dầm. Cho biết động cơ quay 1200 v/ph, khối lượng lệch tâm nặng là 200N, độ lệch tâm $e = 0,3\text{cm}$, lực cản không đáng kể ; không kể đến trọng lượng của dầm.

$$E = 2.10^7 \text{N/cm}^2 ; \quad g = 9,8 \text{m/s}^2$$

Bài giải

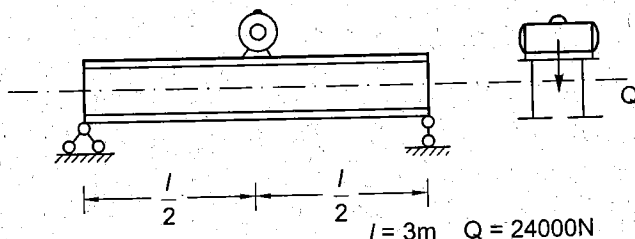
1. Biết dầm chữ I số hiệu 24a có $J_x = 3800\text{cm}^4$; $W_x = 317\text{cm}^3$.

Tần số vòng riêng của hệ là :

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\Delta t}}$$

Δt là độ võng tĩnh do trọng lượng của Q gây nên trên một dầm chữ I là :

$$\begin{aligned} \Delta t &= \frac{Ql^3}{48EJ_x} = \frac{12000.3^3.100^3}{48.2.10^7.3800} \\ &= 0,089\text{cm} \end{aligned}$$



Hình 19-6

Vậy :

$$\omega = \sqrt{\frac{9,8}{8 \cdot 10^{-4}}} = 105 \frac{1}{s}$$

2. Ta xem rằng mỗi vòng quay của động cơ lực quán tính li tâm của khối lượng lệch tâm kích thích xuống dầm một lần. Vậy tần số lực kích thích trong 2π giây sẽ là :

$$\Omega = \frac{2\pi \cdot 1200}{60} = 125,6 \frac{1}{s}$$

Ω cũng đồng thời là tốc độ góc của động cơ.

Cường độ của lực quán tính li tâm là :

$$F_i = m\Omega^2 r = \frac{200}{9,8} (125,6)^2 \cdot 0,003 = 972 \text{ N}$$

Hệ số động là :

$$k_d = \frac{1}{\left| 1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} \right|} = \frac{1}{\left| 1 - \frac{(125,6)^2}{(105)^2} \right|} = 2,32$$

Mômen uốn lớn nhất trên dầm do biên độ của lực kích thích F_i gây nên là :

$$M_x = \frac{F_i l}{4} = \frac{972 \cdot 3}{4} = 729 \text{ Nm}$$

Ứng suất tĩnh là :

$$\sigma_t = \frac{M_x}{W_x} = \frac{729 \cdot 10^2}{2.317} = 115 \text{ N/cm}^2$$

Trị số ứng suất động sẽ là :

$$\sigma_d = \sigma_t k_d = 115 \cdot 2,32 = 267 \text{ N/cm}^2$$

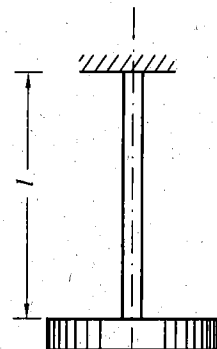
Ứng suất do trọng lượng của mô-tơ gây nên là :

$$\sigma' = \frac{12000 \cdot 3 \cdot 10^2}{4 \cdot 2 \cdot 317} = 1400 \text{ N/cm}^2$$

Vậy ứng suất toàn phần sẽ là :

$$\sigma = \sigma_d + \sigma' = 1667 \text{ N/cm}^2.$$

Ví dụ 2. Một đĩa tròn gắn chặt trên một thanh tròn với một đầu ngàm. Gọi I là mômen quán tính của đĩa đối với trục của thanh (h.19-7), thanh có chiều dài l và độ cứng chống xoắn là GJ_p , bỏ qua trọng lượng của thanh. Xác định tần số vòng riêng dao động xoắn của hệ.



Hình 19-7

Bài giải

Gọi φ là góc xoắn của hệ. Ta bỏ qua lực cản và xem mômen kích thích là bằng không thì φ gây nên là do mômen của lực quán tính. Mômen này luôn luôn ngược chiều với gia tốc góc.

Từ đó ta có :

$$\varphi = \delta_{11} \left(-I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \right) \quad (a)$$

ở đây : δ_{11} là góc xoắn mômen đơn vị đặt trong mặt phẳng của đĩa gây nên :

$$\delta_{11} = \frac{1}{GJ_p}$$

Phương trình (a) được viết lại dưới dạng :

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \omega^2 \varphi = 0 \quad (b)$$

trong đó

$$\omega^2 = \frac{1}{\delta_{11} I}$$

Nghiệm tổng quát của (b) có dạng :

$$\varphi = A \sin(\omega t + \Phi)$$

Vậy tần số vòng riêng dao động xoắn của hệ là :

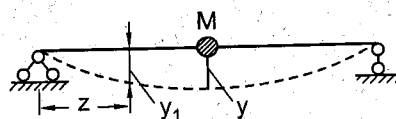
$$\omega = \sqrt{\frac{1}{\delta_{11} I}} = \sqrt{\frac{GJ_p}{I}} \quad (19-15)$$

§19-6. PHƯƠNG PHÁP THU GỌN KHỐI LƯỢNG

Việc bỏ qua trọng lượng bản thân của các liên kết đàn hồi như trên trong nhiều trường hợp cho những kết quả khá phù hợp với thực tế. Song để có được những kết quả có độ chính xác cao hơn thì phải tính đến cả trọng lượng bản thân của các liên kết đàn hồi. Tất nhiên, trong thực tế có những trường hợp không thể không kể đến trọng lượng bản thân của những liên kết này.

Phương pháp đơn giản nhất là phương pháp thu gọn khối lượng. Ta tưởng tượng một hệ tương đương với hệ đã cho có khối lượng tập trung ở một nơi nào đó (nghĩa là hệ có một bậc tự do), sao cho năng lượng dao động trong hệ tương đương bằng năng lượng dao động trong hệ thực.

Ví dụ xét dầm mang khối lượng như trên hình 19-8. Nếu phải kể đến trọng lượng bản thân của dầm thì ta tưởng tượng thu gọn khối lượng của dầm về ngay tại M. Nghĩa là tại M có một khối



Hình 19-8

lượng mới sao cho năng lượng dao động của hệ mới này bằng toàn bộ năng lượng dao động của hệ cũ, cách làm như sau : Ta so sánh độ võng tại mặt cắt z nào đó đối với độ võng ngay tại M do lực P đặt tại đó gây nên. Giả sử vị trí của M là điểm giữa của dầm.

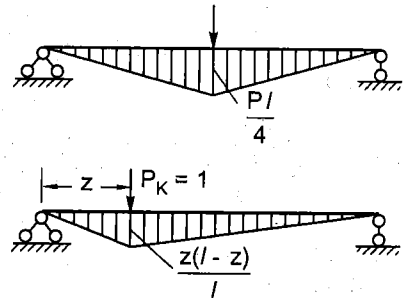
Với phép nhân Vêrêtaghin ta tìm thấy (h.19-9) :

$$y = \frac{Pl^3}{48EJ_x}$$

$$y_1 = \left(\frac{Pl^2}{16} z - \frac{Pz^3}{12} \right) \frac{1}{EJ_x}$$

Vậy :

$$y_1 = y \left(3 \frac{z}{l} - 4 \frac{z^3}{l^3} \right)$$



Hình 19-9

Vận tốc của các chất điểm tại mặt cắt này là :

$$v = \frac{dy_1}{dt} = \left(3 \frac{z}{l} - 4 \frac{z^3}{l^3} \right) \frac{dy}{dt}$$

Gọi q là trọng lượng của dầm trên một đơn vị dài. Động năng của một phân tố dz tại mặt cắt đó sẽ là :

$$dT = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{qdz}{g} \left(3 \frac{z}{l} - 4 \frac{z^3}{l^3} \right)^2 \left(\frac{dy}{dt} \right)^2$$

Động năng của toàn dầm sẽ là :

$$T = \int_0^l dT = 2 \int_0^{l/2} \frac{1}{2} \cdot \frac{q}{g} \left(3 \frac{z}{l} - 4 \frac{z^3}{l^3} \right)^2 \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 dz$$

$$T = \frac{1}{2} \cdot \frac{17}{35} \cdot \frac{ql}{g} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2$$

Ta xem T như động năng của một khối lượng có trị số là $\frac{17}{35} \cdot \frac{ql}{g}$ đặt tại giữa dầm.

Nói một cách khác, hệ tương đương là hệ có khối lượng tập trung tại giữa nhịp với trị số là :

$$M_1 = M + \frac{17}{35} \cdot \frac{ql}{g}$$

Hệ số $\mu = \frac{17}{35}$ được gọi là hệ số thu gọn của khối lượng $\frac{ql}{g}$ của dầm về tại giữa nhịp.

Ví dụ 3. Giải ví dụ 1 khi có kể đến trọng lượng bản thân của dầm. Cho biết $q = 294 \text{ N/m}$.

Bài giải

1. Trọng lượng của dầm sau khi nhân với hệ số thu gọn μ là :

$$Q' = \frac{17}{35} \times 294 \times 3 \times 2 = 882 \text{ N}$$

Độ võng tĩnh khi kể đến trọng lượng của dầm là :

$$\Delta t = \frac{(Q + Q')l^3}{48EJ_x} = \frac{(12000 + 882)3^3 \cdot 10^6}{48 \cdot 2 \cdot 10^7 \cdot 2800} = 0,095 \text{ cm}$$

Tần số vòng riêng của hệ sẽ là :

$$\omega' = \sqrt{\frac{9,8}{9,5 \cdot 10^{-4}}} = 101 \frac{1}{s}$$

2. Hệ số động sẽ là :

$$k_d = \frac{1}{\left| 1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2} \right|} = \frac{1}{\left| 1 - \left(\frac{125,6}{101} \right)^2 \right|} = 1,85$$

Ứng suất động sẽ là :

$$\sigma_d = \sigma_1 k_d = 115 \cdot 1,85 = 213 \text{ N/cm}^2$$

So sánh với ví dụ 1 ta thấy k_d có trị số nhỏ hơn ; ứng suất động cũng vậy. Điều đó cũng dễ hiểu vì năng lượng dao động còn phải dành một phần lớn để làm dao động toàn thanh.

§19-7. DAO ĐỘNG CỦA HỆ NHIỀU BẬC TỰ DO

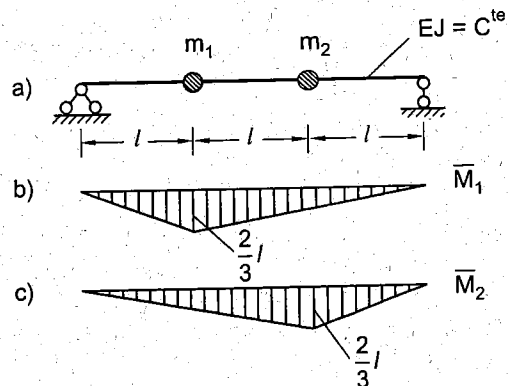
Chúng ta hãy xét trường hợp hệ có hai bậc tự do. Ví dụ xét trường hợp dầm mang hai khối lượng (h.19-10).

Gọi δ_{11} , δ_{21} , δ_{22} và δ_{12} là các chuyển vị đơn vị do các lực đơn vị đặt tại m_1 và m_2 gây nên. Ta kí hiệu δ_{ij} với chỉ số đầu để chỉ vị trí và chỉ số thứ hai để chỉ lực đơn vị gây nên biến dạng.

Theo định lí Betti chúng ta luôn luôn có :

$$\delta_{ij} = \delta_{ji}$$

Giả sử vị trí các khối lượng được đặt như trên hình (19-10). Các biểu đồ mômen do lực đơn vị (không có thứ nguyên) $\bar{M}_1$ và $\bar{M}_2$ được biểu diễn như trên hình 19-10b, c. Các chuyển vị đơn vị được tính theo phép nhân Vêrêsgaghin như sau :



Hình 19-10

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \frac{4l^3}{9EJ} \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{7l^3}{18EJ}$$

Bỏ qua ảnh hưởng của lực cản đối với các khối lượng khi dao động. Như vậy chỉ còn lực quán tính của các khối lượng gây nên các độ võng. Từ đó chúng ta có các phương trình vi phân dao động :

$$\begin{aligned} y_1 &= \delta_{11}(-m_1 \ddot{y}_1) + \delta_{12}(-m_2 \ddot{y}_2) \\ y_2 &= \delta_{21}(-m_1 \ddot{y}_1) + \delta_{22}(-m_2 \ddot{y}_2) \end{aligned} \quad (19-16)$$

y_1 và y_2 là độ võng tại m_1 và m_2 .

$\ddot{y}_1$ và $\ddot{y}_2$ là các gia tốc tại các điểm đó.

Nghiệm của hệ phương trình vi phân (19-16) được chọn dưới dạng :

$$y_1 = A_1 \sin(\omega t + \varphi), \quad y_2 = A_2 \sin(\omega t + \varphi) \quad (19-17)$$

Tính đạo hàm và thay vào (19-16). Sau khi ước lược $\sin(\omega t + \varphi)$ ta được hệ phương trình thuần nhất

$$\begin{aligned} A_1(\delta_{11}m_1\omega^2 - 1) + A_2\delta_{12}m_2\omega^2 &= 0 \\ A_1\delta_{21}m_1\omega^2 + A_2(\delta_{22}m_2\omega^2 - 1) &= 0 \end{aligned} \quad (19-18)$$

Để A_1, A_2 có nghiệm khác không thì định thức của hệ phải bằng 0. Ta có :

$$\begin{vmatrix} \delta_{11}m_1\omega^2 - 1 & \delta_{12}m_2\omega^2 \\ \delta_{21}m_1\omega^2 & \delta_{22}m_2\omega^2 - 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (19-19)$$

Từ đó ta có phương trình bậc 4 đối với ω :

$$\omega^4 \cdot m_1 m_2 (\delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12}^2) - \omega^2 (\delta_{11} m_1 + \delta_{22} m_2) + 1 = 0$$

Phương trình đó cho hai trị số của tần số dao động riêng.

$$\omega^2 = \frac{\delta_{11}m_1 + \delta_{22}m_2 \pm \sqrt{(\delta_{11}m_1 - \delta_{22}m_2)^2 + 4m_1m_2\delta_{12}^2}}{2m_1m_2(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2)} \quad (19-20)$$

Trong trường hợp $m_1 = m_2 = m$ và kích thước, vị trí của các khối lượng đặt trên dầm như hình vẽ 19-10a thì các tần số dao động riêng đó là :

$$\omega_1^2 = \frac{6EJ}{5ml^3} ; \quad \omega_2^2 = \frac{90EJ}{5ml^3}$$

Định thức (19-19) bằng không, điều đó cũng có nghĩa là hai phương trình (19-18) chỉ là một tổ hợp tuyến tính. Thực vậy, thay trị số ω_1^2 vào vị trí của ω^2 trong phương trình đầu của (19-18), đồng thời thay các trị số của δ_{11} và δ_{12} vào ta sẽ tìm thấy :

$$A_2 = +A_1$$

Tương tự như vậy thay ω^2 ở phương trình thứ hai bằng ω_2^2 , đồng thời thay δ_{21} và δ_{22} vào phương trình đó sẽ tìm được :

$$A_2 = -A_1$$

Như vậy với $\omega = \omega_1$ nghiệm của (19-17) có dạng :

$$y_1 = A \sin(\omega_1 t + \varphi); \quad y_2 = A \sin(\omega_1 t + \varphi)$$

với $\omega = \omega_2$ nghiệm của (19-17) sẽ là :

$$y_1 = A \sin(\omega_2 t + \varphi); \quad y_2 = -A \sin(\omega_2 t + \varphi)$$

Hệ có thể có hai dạng dao động như hình (19-11)

Trường hợp ở hình 19-11a là khi hai khối lượng dao động đồng pha và trường hợp thứ hai là khi hai khối lượng dao động nghịch pha.

Dựa vào dạng nghiệm đó ta có thể thiết lập nghiệm tổng quát của hệ phương trình (19-16) dưới dạng

$$\begin{aligned} y_1 &= A \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + B \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \\ y_2 &= A \sin(\omega_1 t + \varphi_1) - B \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \end{aligned} \quad (19-21)$$

Các hằng số A, B và φ_1, φ_2 được xác định từ các điều kiện ban đầu nghĩa là từ vận tốc, vị trí ban đầu của các khối lượng.

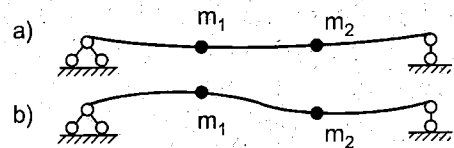
Đối với hệ có hai bậc tự do ta có hai tần số dao động riêng. Đối với hệ có ba bậc tự do ta có ba tần số dao động riêng. Để xác định chúng ta phải giải phương trình bậc ba. Như vậy càng có nhiều bậc tự do thì định thức dạng (19-19) là phương trình bậc càng cao, càng khó giải.

Ví dụ 4

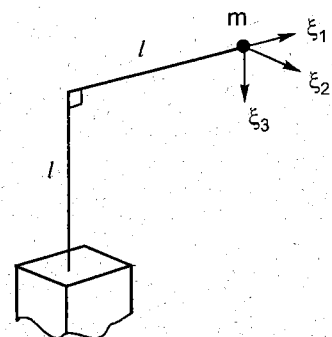
Xác định tần số dao động riêng của một khối lượng đặt ở đầu thanh của khung đàn hồi như h.19-12. Cho biết độ cứng khi uốn và khi xoắn của các thanh là EJ và GJ_ρ .

Bài giải

Ở đây ta thấy khối lượng m có khả năng di chuyển theo ba phương ξ_1, ξ_2, ξ_3 vậy bài toán có ba bậc tự do. Gọi ξ_1, ξ_2, ξ_3 là các độ chuyển dịch theo ba phương đó. Nếu bỏ qua lực ma sát, chỉ kể đến lực quán tính thì ta có hệ phương trình vi phân dao động như sau :



Hình 19-11



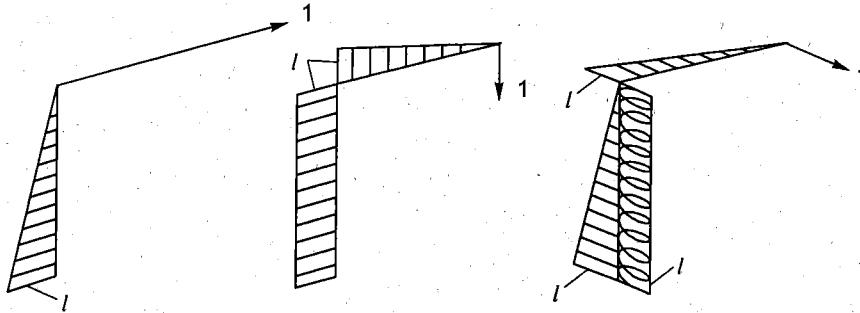
Hình 19-12

$$\xi_1 = -\delta_{11}m\ddot{\xi}_1 - \delta_{12}m\ddot{\xi}_2 - \delta_{13}m\ddot{\xi}_3$$

$$\xi_2 = -\delta_{21}m\ddot{\xi}_1 - \delta_{22}m\ddot{\xi}_2 - \delta_{23}m\ddot{\xi}_3$$

$$\xi_3 = -\delta_{31}m\ddot{\xi}_1 - \delta_{32}m\ddot{\xi}_2 - \delta_{33}m\ddot{\xi}_3$$

Để xác định các chuyển vị đơn vị ta vẽ các biểu đồ nội lực do các lực đơn vị gây nên.
(h.19-13)



Hình 19-13

Thực hiện phép nhân Vêrêsgahin giữa các biểu đồ ta tìm thấy :

$$\delta_{11} = \frac{l^3}{3EJ} ; \quad \delta_{12} = \frac{l^3}{2EJ} ; \quad \delta_{13} = 0$$

$$\delta_{21} = \frac{l^3}{2EJ} ; \quad \delta_{22} = \frac{4l^3}{3EJ} ; \quad \delta_{23} = 0$$

$$\delta_{31} = 0 ; \quad \delta_{32} = 0 ; \quad \delta_{33} = l^3 \left(\frac{2}{3EJ} + \frac{1}{GJ_p} \right)$$

Ta có hệ phương trình vi phân :

$$\xi_1 = -m\delta_{11}\ddot{\xi}_1 - m\delta_{12}\ddot{\xi}_2$$

$$\xi_2 = -m\delta_{21}\ddot{\xi}_1 - m\delta_{22}\ddot{\xi}_2$$

$$\xi_3 = -m\delta_{33}\ddot{\xi}_3$$

Hai phương trình đầu giống như (19-16), vậy ta có thể áp dụng kết quả của (19-19) để tính cho các tần số riêng ω_1 và ω_2 .

Ta có :

$$\omega_1^2 = \frac{6EJ}{7ml^3} (5 - 3\sqrt{2})$$

$$\omega_2^2 = \frac{6EJ}{7ml^3} (5 + 3\sqrt{2})$$

Tần số thứ ba được tính trực tiếp với công thức :

$$\omega_3^2 = \frac{1}{m\delta_{33}} = \frac{1}{m l^3} \cdot \frac{1}{\frac{2}{3EJ} + \frac{1}{GJ_p}}$$

Chú ý đến các hệ phương trình (19-16) và (19-18). Các hệ đó có thể viết lại dưới dạng ma trận như sau :

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix} = \{0\} \quad (19-22)$$

$$\left[\omega^2 \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \{0\}$$

Trong đó ma trận có các thành phần là những chuyển vị đơn vị được gọi là ma trận mềm và được kí hiệu :

$$[D] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix}$$

Ma trận gồm các khối lượng thì được gọi là ma trận khối lượng và được kí hiệu là :

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

Ma trận đơn vị được kí hiệu là :

$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Với các kí hiệu đó biểu thức (19-22) có thể viết gọn lại như sau :

$$\begin{aligned} \{y\} + [D][M]\{\ddot{y}\} &= \{0\} \\ \{\omega^2[D][M] - [I]\}\{A\} &= \{0\} \end{aligned} \quad (19-23)$$

Để vector $\{A\}$ có nghiệm thì định thức của phương trình thứ hai của (19-23) phải bằng không. Ta có :

$$|\omega^2[D][M] - [I]| = 0 \quad (19-24)$$

Giải (19-24) ta sẽ có được các tần số dao động riêng của hệ ω^2 .

Cách giải chúng ta thực hiện trên đây đã dựa vào ma trận mềm vì vậy cách giải đó được gọi là phương pháp tính tần số dao động riêng theo ma trận mềm.

Đối với hệ có n bậc tự do thì các ma trận sẽ có dạng như sau :

$$[D] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn} \end{bmatrix}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & m_n \end{bmatrix}$$

$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Ta chỉ cần thay các ma trận đó vào (19-24) sẽ được một hệ phương trình để xác định ω^2 .

Ta cũng có thể viết phương trình thứ hai của (19-23) dưới một dạng khác :

Viết một phương trình thứ k nào đó của hệ phương trình đó. Ta có :

$$m_1 \delta_{k1} \omega^2 . A_1 + m_2 \delta_{k2} \omega^2 . A_2 + \dots + (m_k \delta_{kk} \omega^2 - 1) . A_k + m_n \delta_{kn} \omega^2 . A_n = 0$$

Đem chia cả hai vế cho $\omega^2 . A_1$ ta có :

$$m_1 \delta_{k1} + m_2 \delta_{k2} \phi_{21} + \dots + (m_k \delta_{kk} - \lambda) \phi_{k1} + \dots + m_n \delta_{kn} \phi_{n1} = 0$$

Trong đó :

$$\phi_{21} = \frac{A_2}{A_1} , \dots , \phi_{k1} = \frac{A_k}{A_1} , \dots$$

và

$$\lambda = \frac{1}{\omega^2}$$

Như vậy phương trình hai của (19-23) có thể viết lại dưới dạng :

$$([D][M] - \lambda[I])\{\phi\} = \{0\} \quad (19-25)$$

Để vectơ $\{\phi\}$ có nghiệm, định thức của nó phải bằng không vậy :

$$|[D][M] - \lambda[I]| = 0 \quad (19-26)$$

Chú ý : hệ này có n phương trình nhưng chỉ có n - 1 ẩn số, vectơ $\{\phi\}$ là vectơ cột như sau :

$$\{\phi\} = \begin{bmatrix} 1 \\ \phi_{21} \\ \vdots \\ \phi_{n1} \end{bmatrix}$$

Định thức (19-26) được thay cho (19-24). Thường tính λ ở hệ này đơn giản hơn.

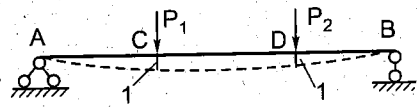
§19-8. MA TRẬN CỨNG

1. Định nghĩa

Giả sử có dầm tĩnh định AB.

Tại C ta đặt một lực P_1 . Nếu P_1 đủ lớn để gây nên một độ võng bằng đơn vị thì lúc đó độ cứng của dầm tại C là :

$$r_{11} = P_1$$



Hình 19-14

Ta nhận thấy độ cứng và độ mềm là hai khái niệm ngược nhau nhưng cùng thể hiện bản chất đàn hồi của dầm. Thực vậy nếu lấy $P_1 = 1$ thì độ võng tại C là δ_{11} , δ_{11} tương trưng cho độ mềm của dầm.

Đem độ võng đơn vị do $P_1 = r_{11}$ gây nên chia cho δ_{11} thì trị số đó đúng bằng r_{11} . Ta có :

$$r_{11} = \frac{1}{\delta_{11}} \quad (19-27)$$

Bây giờ ta xét độ tương quan kháng lực giữa hai điểm CD bất kì nào đó. Nếu tại D ta đặt một lực P_2 đủ lớn để tạo nên một độ võng bằng đơn vị thì độ cứng tại đó sẽ là :

$$r_{22} = P_2$$

Nếu lấy $P_2 = 1$ thì ta có độ võng tại đó là δ_{22} . Tương quan giữa r_{22} và δ_{22} là :

$$r_{22} = \frac{1}{\delta_{22}}$$

Gọi δ_{12} và δ_{21} là các độ võng đơn vị tại 1 và 2 do các lực đơn vị đặt tại 2 và 1 gây nên. Theo định lí Betti ta luôn có $\delta_{12} = \delta_{21}$.

Ta hãy xét trường hợp P_1 và P_2 có một trị số bất kì nào đó.

Độ võng tại C có hai thành phần :

– Do chính P_1 gây nên $y_1 = \frac{P_1}{r_{11}}$

– Do P_2 tác dụng $P_2 \cdot \delta_{12}$

Độ võng tại D cũng có hai thành phần :

– Do chính P_2 gây nên $y_2 = \frac{P_2}{r_{22}}$

– Do P_1 tác dụng $P_1 \delta_{21}$.

Phản lực đàn hồi tại C và D để chống lại với biến dạng do ngoại lực gây nên là

$$R_C = r_{11}y_1 + r_{22}\delta_{12}y_2$$

$$R_D = r_{11}\delta_{21}y_1 + r_{22}y_2$$

(19-28)

Chú ý : Chúng ta phải tính từng thành phần riêng biệt vì độ cứng r_{11} và r_{22} là độ cứng riêng biệt của các điểm C và D. Không thể đem chia lực nơi này cho độ cứng nơi khác.

Trong các hệ thức của (19-28), các hệ số :

$$r_{12} = r_{22} \cdot \delta_{12}$$

$$r_{21} = r_{11} \cdot \delta_{21}$$

được gọi là hệ số độ cứng ảnh hưởng. Chúng nêu lên ảnh hưởng của lực ở nơi này đối với nơi khác. Cụ thể ở đây là sự ảnh hưởng của P_2 đối với điểm 1 và ngược lại ảnh hưởng của P_1 đối với điểm 2. Biểu thức (19-28) được viết dưới dạng ma trận như sau :

$$\begin{bmatrix} R_C \\ R_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad (19-29)$$

Ma trận thừa số đó được gọi là ma trận độ cứng. Các thành phần của ma trận độ cứng được suy ra từ ma trận độ mềm là như sau :

$$r_{kk} = \frac{1}{\delta_{kk}}$$

$$r_{ij} = r_{jj} \cdot \delta_{ij} \quad (19-30)$$

Nhận xét

1. Ma trận độ cứng có các thành phần trên đường chéo chính là những lượng nghịch đảo đối với các thành phần trên đường chéo chính của ma trận mềm.

2. Ma trận cứng không phải là đối xứng vì $\delta_{ij} = \delta_{ji}$ nhưng $r_{jj} \neq r_{ii}$ (Độ cứng ở mỗi vị trí trên dầm là khác nhau). Vậy tích của chúng không thể bằng nhau được. Do đó :

$$r_{ij} \neq r_{ji}$$

Như vậy ma trận cứng không phải là nghịch đảo của ma trận mềm.

2. Xác định tần số dao động riêng bằng ma trận cứng

Giả sử có hai khối lượng m_1 và m_2 đặt tại C và D. Khi dao động các khối lượng này tạo nên những lực quán tính $-m_1\ddot{y}_1$ và $-m_2\ddot{y}_2$. Các lực quán tính đó phải cân bằng với các lực đàn hồi R_C và R_D tính với biểu thức (19-29). Từ đó ta có hệ phương trình vi phân :

$$\begin{aligned} -m_1\ddot{y}_1 + y_1 r_{11} + y_2 r_{12} &= 0 \\ -m_2\ddot{y}_2 + y_1 r_{21} + y_2 r_{22} &= 0 \end{aligned} \quad (19-31)$$

Nghiệm của hệ phương trình được chọn dưới dạng :

$$y_1 = A_1 \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{và} \quad y_2 = A_2 \sin(\omega t + \varphi)$$

Đạo hàm hai lần và thay vào hai phương trình trên với chú ý chọn dấu của A_1 và A_2 cho phù hợp với điều kiện cân bằng của các lực, ta đi đến hệ phương trình sau :

$$\begin{aligned} A_1 r_{11} + A_2 r_{12} - m_1 \omega^2 A_1 &= 0 \\ A_1 r_{21} + A_2 r_{22} - m_2 \omega^2 A_2 &= 0 \end{aligned} \quad (19-32)$$

Ta có thể viết dưới dạng ma trận như sau :

$$\left(\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \right) \{A\} = \{0\}$$

Hay :

$$([R] - \omega^2 [M])\{A\} = \{0\}$$

Để $\{A\}$ có nghiệm, định thức của hệ phương trình phải bằng không. Ta có :

$$|[R] - \omega^2 [M]| = 0 \quad (19-33)$$

Giải phương trình đó ta có các tần số dao động riêng ω

Ví dụ với hai khối lượng đang xét ta có :

$$\begin{vmatrix} r_{11} - \omega^2 m_1 & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} - \omega^2 m_2 \end{vmatrix} = 0$$

Từ đó ta có phương trình bậc 4.

$$m_1 m_2 \omega^4 + (m_2 r_{11} + m_1 r_{22}) \omega^2 - r_{11} r_{22} + r_{12} \cdot r_{21} = 0$$

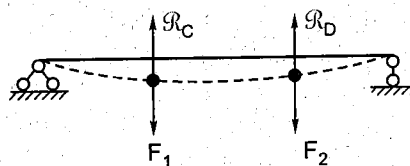
Vậy ta có hai nghiệm như sau :

$$\omega^2 = \frac{-(m_2 r_{11} + m_1 r_{22}) \pm \sqrt{(m_2 r_{11} + m_1 r_{22})^2 - 4 m_1 m_2 (r_{12} r_{21} - r_{11} r_{22})}}{2 m_1 m_2}$$

Mở rộng cho bài toán có n bậc tự do các ma trận sẽ có dạng :

$$[R] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{bmatrix}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & m_n \end{bmatrix}$$



Hình 19-15

Với

$$\{A\} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_n \end{bmatrix}$$

Cũng giống như đối với ma trận mềm ta có thể sử dụng các trị :

$$\phi_{21} = \frac{A_2}{A_1} ; \phi_{31} = \frac{A_3}{A_1} ; \dots ; \phi_{n1} = \frac{A_n}{A_1}$$

để thu gọn phương trình. Khi đó ta có :

$$([R] - \omega^2[M])\{\phi\} = \{0\}$$

Trong đó vector $\{\phi\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ \phi_{21} \\ \dots \\ \phi_{n1} \end{Bmatrix}$

§19-9. DAO ĐỘNG CƯỜNG BỨC

Chúng ta vẫn bắt đầu xét với hệ có hai khối lượng như các mục trước (h.19-16). Lực kích thích $P(t)$ có thể là một lực cũng có thể là nhiều lực. Gọi điểm đặt lực là K thì ảnh hưởng của P_K đến một khối lượng m_i nào đó sẽ bằng độ võng nó gây tại m_i . Độ võng đó là :

$$P_K \cdot \delta_{ik}$$

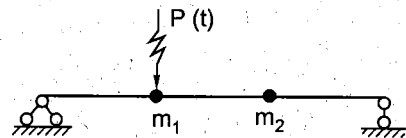
Trong hệ đang xét, giả thiết lực $P(t)$ tác dụng lên khối lượng m_1 . $P(t)$ biến thiên theo phương trình :

$$P(t) = P_{10} \cdot \sin \theta t \quad (19-34)$$

P_{10} là biên độ của $P(t)$. Chỉ số 1 để chỉ vị trí tác động của $P(t)$ và số 0 để chỉ đó là biên độ cực đại.

Ta cũng có hai phương pháp để tính dao động cưỡng bức.

- Phương pháp ma trận mềm
- Phương pháp ma trận cứng



Hình 19-16

Sau đây chúng ta sẽ lần lượt đề cập đến các phương pháp đó :

1. Phương pháp ma trận mềm

Hệ phương trình vi phân dao động tự do được viết như biểu thức (19-16). Vì có thêm lực kích thích $P(t)$ nên hệ phương trình vi phân dao động sẽ có dạng :

$$\begin{aligned} y_1 + m_1 \delta_{11} \ddot{y}_1 + m_2 \delta_{12} \ddot{y}_2 &= P_{10} \delta_{11} \sin \theta t \\ y_2 + m_1 \delta_{21} \ddot{y}_1 + m_2 \delta_{22} \ddot{y}_2 &= P_{10} \delta_{21} \sin \theta t \end{aligned} \quad (19-35)$$

Nghiệm của hệ phương trình sẽ là nghiệm tổng quát của hệ thuần nhất không vế phải, nghĩa là nghiệm tổng quát của dao động tự do, cộng với một nghiệm riêng của hệ có vế phải.

$$y(t) = y_t(t) + y_c(t)$$

Như vậy sự dao động của hệ là tổng của hai dao động.

– Dao động tự do với tần số dao động riêng $y_t(t)$

– Dao động cưỡng bức với tần số dao động của lực kích thích. Dao động tự do với tần số dao động riêng sẽ nhanh chóng tắt đi vì sức cản của môi trường. Sau một thời gian sự dao động của hệ là sự dao động với tần số của lực kích thích. Như vậy chúng ta chọn nghiệm của hệ phương trình vi phân dưới dạng :

$$y_1 = C_1 \sin \theta t \quad \text{và} \quad y_2 = C_2 \sin \theta t \quad (19-36)$$

Đạo hàm hai lần rồi thay vào (19-35). Sau khi ước lược cả hai vế cho $\sin \theta t$ ta được hệ phương trình :

$$\begin{aligned} C_1 - \theta^2 \delta_{11} m_1 C_1 - \theta^2 \delta_{12} m_2 C_2 &= P_{10} \delta_{11} \\ C_2 - \theta^2 \delta_{21} m_1 C_1 - \theta^2 \delta_{22} m_2 C_2 &= P_{10} \delta_{21} \end{aligned} \quad (19-37)$$

Chú ý, vế phải của (19-37) thực chất là các độ võng do biên độ của lực kích thích gây nên tại điểm 1 và 2, kí hiệu các độ võng này là Δ_1 và Δ_2 . Lực kích thích là lực chúng ta tác động lên hệ vậy lực này được xem là đã biết. Điều đó có nghĩa là θ , Δ_1 và Δ_2 cũng đã biết. Ẩn số của (19-37) chỉ còn là C_1 và C_2 . Ta dễ dàng xác định được C_1 và C_2 vì đó là một hệ hai phương trình với hai ẩn số.

Ta có thể viết (19-37) dưới dạng ma trận như sau :

$$\theta^2 \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{bmatrix} = \{0\}$$

Hay gọn hơn dưới dạng kí hiệu :

$$\theta^2 [D][M][C] - [I][C] + \{\Delta\} = \{0\} \quad (19-38)$$

Để có thể viết gọn (19-38) dưới một dạng khác ta chú ý đến vectơ các lực quán tính.

Khi độ võng dao động đạt đến biên lớn nhất C_1, C_2 thì lực quán tính lúc đó cũng đạt đến giá trị cực đại. Ta có :

$$F_{10} = \theta^2 m_1 C_1$$

$$F_{20} = \theta^2 m_2 C_2$$

Hay có thể viết dưới dạng ma trận :

$$[F_{j0}] = \theta^2 [M][C] \quad (19-39)$$

Nhân cả hai vế của biểu thức đó cho $[M]^{-1}$ ta được :

$$[M]^{-1} \{F_{j0}\} = \theta^2 [M]^{-1} [M][C]$$

Tích $[M]^{-1}[M] = [I]$ vậy ta có thể viết lại biểu thức đó như sau :

$$[I][C] = \frac{1}{\theta^2} [M]^{-1} \{F_{j0}\} \quad (19-40)$$

Nhân cả hai vế của (19-39) với $[D]$ ta có :

$$[D]\{F_{j0}\} = \theta^2 [D][M][C] \quad (19-41)$$

Đem cả (19-40) và (19-41) vào (19-38) ta có thể viết phương trình đó dưới dạng :

$$\left([D] - \frac{1}{\theta^2} [M]^{-1} \right) \{F_{j0}\} + \{\Delta\} = \{0\} \quad (19-42)$$

Nếu gọi :

$$[D^*] = \left[D - \frac{1}{\theta^2} M^{-1} \right] \quad (19-43)$$

thì (19-42) sẽ có dạng :

$$[D^*] \cdot \{F_{j0}\} + \{\Delta\} = \{0\} \quad (19-44)$$

Trong trường hợp xét với hai khối lượng, ma trận $[D^*]$ được tính như sau :

$$[D^*] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} - \frac{1}{\theta^2} \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix}$$

Vậy :

$$[D^*] = \begin{bmatrix} \delta_{11} - \frac{1}{\theta^2 m_1} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} - \frac{1}{\theta^2 m_2} \end{bmatrix}$$

Những nội dung vừa trình bày đều đúng với hệ n bậc tự do. Khi đó ta sẽ có các ma trận dưới dạng sau đây :

$$\begin{aligned}
 [D] &= \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn} \end{bmatrix} \\
 \{F_{jo}\} &= \begin{bmatrix} F_{10} \\ F_{20} \\ \dots \\ F_{n0} \end{bmatrix} ; \quad \{\Delta\} = \begin{bmatrix} \Delta_{10} \\ \Delta_{20} \\ \dots \\ \Delta_{n0} \end{bmatrix} \\
 [M] &= \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & m_n \end{bmatrix} \\
 [M]^{-1} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{m_n} \end{bmatrix} \\
 [D^*] &= \begin{bmatrix} \delta_{11} - \frac{1}{\theta^2 m_1} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \dots & \delta_{kk} - \frac{1}{\theta^2 m_k} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \delta_{nn} - \frac{1}{\theta^2 m_n} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

2. Phương pháp ma trận cứng

Từ hệ phương trình vi phân (19-31) ta có thể viết phương trình vi phân dao động cho hệ hai khối lượng dưới tác động của lực kích thích $P(t) = P_{10} \sin \theta t$ đặt tại m_1 như sau :

$$\begin{aligned}
 -m_1 \ddot{y}_1 + r_{11} y_1 + r_{12} y_2 &= r_{11} P_{10} \delta_{11} \sin \theta t \\
 -m_2 \ddot{y}_2 + r_{21} y_1 + r_{22} y_2 &= r_{22} P_{10} \delta_{21} \sin \theta t
 \end{aligned} \tag{19-45}$$

Trong đó :

$$r_{11} P_{10} \delta_{11} = P_{10} = R_{10}$$

$$r_{22} P_{10} \delta_{21} = r_{21} P_{10} = R_{20}$$

Chọn nghiệm của hệ phương trình dưới dạng :

$$y_1 = C_1 \sin \theta t \quad y_2 = C_2 \sin \theta t$$

Tính đạo hàm và thay vào (19-45) ta có :

$$-m_1 \theta^2 C_1 + C_1 \cdot r_{11} + C_2 r_{12} = R_{10}$$

$$-m_2 \theta^2 C_2 + C_1 \cdot r_{21} + C_2 r_{22} = R_{20}$$

Hay có thể viết hệ phương trình đó dưới dạng ma trận :

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} - \theta^2 \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R_{10} \\ R_{20} \end{bmatrix} = \{0\}$$

Dưới dạng các kí hiệu, ta có :

$$[R][C] - \theta^2[M][C] - \{R\} = \{0\}$$

Đặt $[C]$ làm thừa số chung ta được :

$$([R] - \theta^2[M])[C] - \{R\} = \{0\} \quad (19-46)$$

Kí hiệu :

$$[R^*] = [R] - \theta^2[M] \quad (19-47)$$

Biểu thức (19-46) có thể viết lại dưới dạng :

$$[R^*][C] = \{R\} \quad (19-48)$$

Để tránh hiện tượng cộng hưởng, định thức của $[R^*]$ phải khác 0 nghĩa là :

$$|[R] - \theta^2[M]| \neq 0$$

Với trường hợp hai khối lượng đang xét, định thức đó có dạng :

$$\begin{vmatrix} r_{11} - \theta^2 m_1 & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} - \theta^2 m_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Nghĩa là :

$$(r_{11} - \theta^2 m_1)(r_{22} - \theta^2 m_2) - r_{12} r_{21} \neq 0$$

Những điều lập luận trên đây hoàn toàn đúng với hệ có n bậc tự do.

Với hệ có n bậc tự do, các ma trận sẽ có dạng như sau :

$$[R] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{bmatrix} \quad \{C\} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \dots \\ C_n \end{bmatrix}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & m_n \end{bmatrix} \quad \{R\} = \begin{bmatrix} R_{10} \\ R_{20} \\ \dots \\ R_{n0} \end{bmatrix}$$

§19-10. TẦN SỐ DAO ĐỘNG RIÊNG CỦA THANH ĐỒNG NHẤT

Phân trên chúng ta đã xét hệ có n bậc tự do. Hệ có bao nhiêu khối lượng là có bấy nhiêu bậc tự do. Có bao nhiêu bậc tự do thì phải thiết lập bấy nhiêu phương trình vi phân. Khi đề cập đến trọng lượng bản thân của thanh thì hệ trở nên là vô số bậc tự do và bài toán không giải được. Sau đây chúng ta nêu lên cách giải bài toán chỉ cần thiết lập một phương trình vi phân.

1. Dao động dọc

Gọi trục của thanh là z . Tách ra khỏi thanh một đoạn dz với hai mặt cắt (1-1) và (2-2). Nội lực trên mặt cắt (1-1) là N . Nội lực trên mặt cắt (2-2) là $N + dN$ với $dN = \frac{\partial N}{\partial z} dz$. Gọi ω là

chuyển động của phân tố theo trục z thì lực quán tính do khối lượng dm trong chuyển động đó là ;

$$-dm \ddot{\omega} = -\rho F \cdot dz \cdot \ddot{\omega}$$

Trong đó ρ là khối lượng riêng của thanh.

Điều kiện cân bằng của phân tố là :

$$N + \rho F \cdot dz \ddot{\omega} = N + \frac{\partial N}{\partial z} dz$$

Từ đó ta có phương trình :

$$\rho F \cdot \ddot{\omega} = \frac{\partial N}{\partial z} \quad (19-49)$$

Mặt khác ta có biến dạng tỉ đối theo phương z là :

$$\varepsilon = \frac{\partial \omega}{\partial z} = \frac{N}{EF} \quad (19-50)$$

Từ hai phương trình (19-49) và (19-50) ta thiết lập được phương trình vi phân dao động là :

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} = \frac{\rho \partial^2 \omega}{E \partial t^2} \quad (19-51)$$

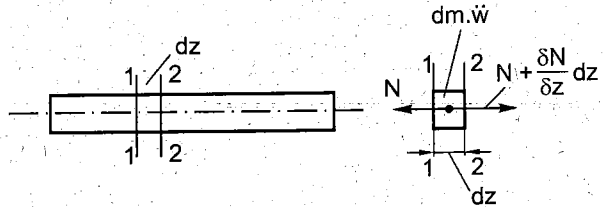
Như vậy ta phải tìm hàm ω với hai biến số z và t .

Ta chọn nghiệm dưới dạng :

$$\omega = Z \sin \omega t \quad (19-52)$$

Z là một hàm chỉ phụ thuộc vào z . Sau khi thay hàm đó vào (19-51) ta được :

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + \rho \frac{\omega^2}{E} \cdot Z = 0 \quad (19-53)$$



Hình 19-17

Ở đây hệ số của Z là dương nên nghiệm Z có dạng^(*).

$$Z = A \sin \sqrt{\frac{\rho \omega^2}{E}} \cdot z + B \cos \sqrt{\frac{\rho \omega^2}{E}} \cdot z \quad (19-54)$$

Các hằng số tích phân A, B được xác định từ điều kiện biên.

Ví dụ với thanh một đầu tự do và một đầu ngàm như (hình 19-18) sẽ có các điều kiện biên như sau :

– Đầu tự do $N = 0$ và từ điều kiện (19-50) ta có $\frac{\partial \omega}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial z} = 0$

– Tại đầu ngàm bên trái $z = 0, Z = 0$

Từ các điều kiện đó ta tìm thấy :

$$B = 0 \text{ và } A \cdot \cos \sqrt{\frac{\rho \omega^2}{E}} \cdot l = 0$$

Biểu thức cuối đưa đến kết luận $A = 0$ hay $\cos \sqrt{\frac{\rho \omega^2}{E}} \cdot l = 0$ với $A = 0$ thì nghiệm trở nên vô nghĩa. Vậy ta lấy điều kiện thứ hai, nghĩa là phải có :

$$\omega l \sqrt{\frac{\rho}{E}} = \frac{\pi}{2} (2n - 1)$$

n là một số nguyên nào đó. Từ đó ta có biểu thức để tính tần số dao động riêng dọc trục là :

$$\omega = \frac{\pi}{2l} (2n - 1) \cdot \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (19-55)$$

Theo biểu thức ta có vô số tần số dao động riêng dọc trục. Tần số dễ gây nên cộng hưởng nhất là tần số riêng thấp nhất. Đó là :

$$\omega = \frac{\pi}{2l} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (19-56)$$

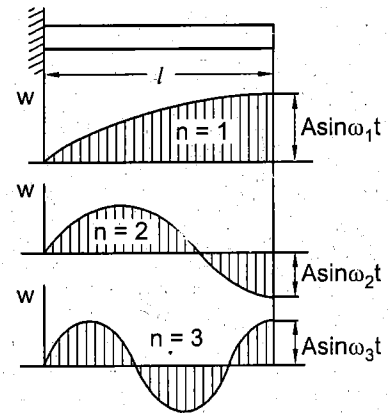
Đem (19-55) và $B = 0$ vào (19-54) ta được :

$$Z = A \sin \frac{(2n - 1)\pi z}{2l} \quad (19-57)$$

và phương trình dao động sẽ là :

$$\omega = A \sin \frac{(2n - 1)\pi z}{2l} \sin \omega t \quad (19-58)$$

Lấy $n = 1, 2, 3$ ta sẽ có ba dạng dao động như trên hình (h.19-18).



Hình 19-18

(*) Xem ghi chú ở cuối sách

2. Dao động ngang

Xét dao động ngang của dầm đặt trên hai gối tựa AB. Mặt cắt ngang của dầm là không đổi. Tách ra khỏi dầm một phần tử dz . Khối lượng của phần tử là :

$$dm = \rho.F.dz$$

Gọi y là độ võng của dầm tại vị trí của phần tử. Lực quán tính phân bố q do phần tử gây nên khi dao động là :

$$q = -\rho F \ddot{y}$$

Dấu $-$ để chỉ lực phân bố ngược chiều với độ võng.

$\ddot{y}$ là đạo hàm bậc 2 của y theo thời gian. Như ta đã biết, tương quan giữa lực phân bố và độ võng là :

$$q = EJ \cdot \frac{\partial^4 y}{\partial z^4}$$

Từ đó ta thiết lập được phương trình vi phân của dao động ngang là :

$$\frac{\partial^4 y}{\partial z^4} + \frac{\rho F}{EJ} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (19-59)$$

Cũng như trường hợp dao động dọc, hàm y phải là hàm hai biến số z và t . Vậy ta chọn nghiệm :

$$y = Z \sin \omega t$$

Sau khi tính đạo hàm thay vào và ước lược $\sin \omega t$ ta có phương trình vi phân :

$$Z^{IV} - a^4 \cdot Z = 0 \quad (19-60)$$

Trong đó

$$a^4 = \frac{\rho F \omega^2}{EJ} \quad (19-61)$$

Ở đây thừa số của Z là một số âm* vậy nghiệm của phương trình có dạng :

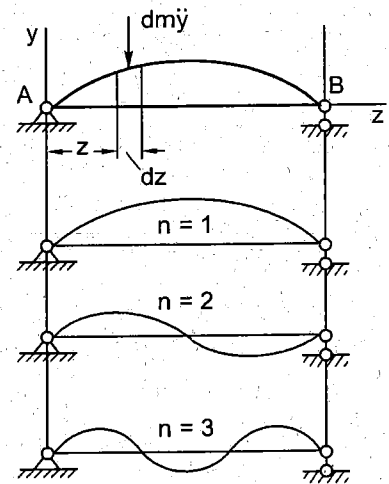
$$Z = A \sin az + B \cos az + C \sinh az + D \cosh az \quad (19-62)$$

Các hằng số tích phân A, B, C, D được xác định từ điều kiện biên.

Tại các gối tựa A và B mômen uốn và độ võng phải bằng 0. Do đó ta phải có ;

$$\text{với } z = 0 \quad Z = 0 \text{ và } \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = 0$$

$$\text{với } z = l \quad Z = 0 \text{ và } \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = 0$$



Hình 19-19

(*) Xem ghi chú ở cuối sách

Từ hai điều kiện đầu ta xác định được $B = D = 0$. Như vậy Z có dạng :

$$Z = A \sin az + C \sinh az$$

Sử dụng hai điều kiện thứ hai ta có hệ phương trình thuần nhất :

$$A \sin a l + C \sinh a l = 0$$

$$-A \sin a l + C \sinh a l = 0 \quad (19-63)$$

Để A và C có nghiệm, định thức của hệ phương trình phải bằng 0. Ta có :

$$\begin{vmatrix} \sin a l & \sinh a l \\ -\sin a l & \sinh a l \end{vmatrix} = 0$$

Hay :

$$\sin a l / \sinh a l = 0$$

$\sinh a l$ chỉ bằng 0 khi $a l = 0$. Vậy chỉ còn lại điều kiện :

$$\sin a l = 0 \text{ nghĩa là } a l = \pi n.$$

Đem thay trị số đó vào (19-61) ta có tần số dao động riêng của hệ.

$$\omega = \frac{\pi^2 \cdot n^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho \cdot F}} \quad (19-64)$$

Như vậy, ta có nhiều tần số dao động riêng. Khác với dao động dọc trục, ở đây các tần số dao động riêng phụ thuộc vào n^2 .

Cuối cùng dạng của Z chỉ còn giữ lại 1 thành phần $A \sin az$ với $a = \frac{\pi n}{l}$. Ta có :

$$Z = A \sin \frac{\pi n}{l} \cdot z$$

Tần số thấp nhất khi $n = 1$, dạng dao động là một nửa bước sóng hình sin. Với $n = 2$ là hai nửa bước sóng, với $n = 3$ là ba nửa bước sóng. Các dạng đó được vẽ trên hình (19-19).

Tùy theo sự tác động của ngoại lực, dầm sẽ có bước sóng cộng hưởng thích hợp và phát ra âm thanh tương ứng.

§19-11. PHƯƠNG PHÁP GẦN ĐÚNG ĐỂ XÁC ĐỊNH TẦN SỐ DAO ĐỘNG RIÊNG

1. Phương pháp Role

Đối với trục mang nhiều khối lượng, hay có độ cứng thay đổi theo từng đoạn, cách xác định tần số dao động riêng như trên là không thể thực hiện được. Role đã đề ra phương pháp tính gần đúng như sau :

Giả sử có hệ đàn hồi dao động là một dầm mang nhiều khối lượng (h.19-20). Trong các khối lượng đó bao gồm cả khối lượng bản thân và những chi tiết lắp ghép.

Chọn một dạng dao động nào đó và giả sử tất cả các khối lượng dao động đồng pha. Xét sự chuyển động của khối lượng thứ i . Ta có :

$$y_i = A_i \sin(\omega t + \varphi)$$

Tốc độ chuyển động của khối lượng là :

$$\dot{y}_i = A_i \omega \cos(\omega t + \varphi)$$

Khi tất cả các khối lượng có độ võng bằng 0 thì vận tốc là lớn nhất và động năng của hệ đạt đến giá trị cực đại :

$$K = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^n m_i A_i^2$$

Nhưng lúc đó hệ không có biến dạng nên thế năng biến dạng đàn hồi là bằng 0.

Ngược lại vào lúc các khối lượng đạt đến vị trí xa nhất, lúc đó vận tốc là bằng không, thế năng biến dạng đàn hồi là cực đại. Gọi thế năng đó là U . Từ định luật bảo toàn năng lượng, U phải bằng động năng ban đầu. Ta có :

$$U = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^n m_i A_i^2$$

Từ đó ta có được tần số vòng riêng :

$$\omega^2 = \frac{2U}{\sum_{i=1}^n m_i A_i^2} \quad (19-65)$$

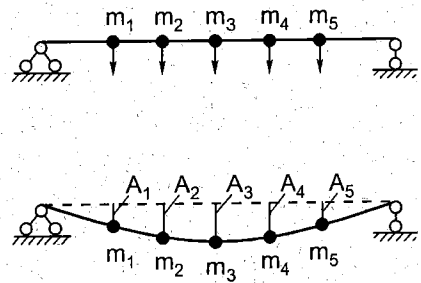
Nếu thay m_i bằng lực $P_i = m_i g$ và độ võng lớn nhất là A_i thì thế năng biến dạng đàn hồi là :

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n P_i A_i$$

Thay trị số đó vào (19-65) ta có :

$$\omega^2 = g \cdot \frac{\sum_{i=1}^n P_i A_i}{\sum_{i=1}^n P_i A_i^2} \quad (19-66)$$

Để tính được với công thức (19-65) hoặc (19-66) ta phải biết phương trình của đường đàn hồi. Nhưng như vậy lại phải giải hệ phương trình vi phân. Để tránh được điều đó ta chọn một đường đàn hồi nào đó gần đúng với đường đàn hồi thực. Từ đó có thể tính được ω . Trị số này không sai kém nhiều so với ω được tính bằng phương pháp chính xác.



Hình 19-20

Ví dụ 5. Xác định tần số dao động riêng của trục bậc mang hai đĩa nặng 13000N và 20000N (h.19–21).

Bài giải

Dùng phương pháp tích phân theo số gia giới nội để giải quyết bài toán.

Như ta đã có :

$$y'' = -\frac{M_x}{EJ_x}$$

Vậy góc xoay θ là tích phân của biểu thức đó. Ta có :

$$\Delta\theta_i = \frac{M_i}{EJ_i} \Delta z \text{ và } \theta^* = \sum_{i=1}^n \frac{M_i}{EJ_i} \Delta z$$

Sau khi đã có θ^* ta có thể tính được độ võng.

$$y^* = \sum_{i=1}^n \theta_i^* \Delta z$$

Dấu * ở đây để chỉ các trị số đó chưa kể đến liên kết của dầm.

Sau hai lần tích phân nhất thiết phải có hai hằng số tích phân. Vậy độ võng thực phải được tính dưới dạng :

$$y = y^* + C_1 z + C_2$$

Chúng ta phải chọn C_1 và C_2 sao cho phù hợp với điều kiện liên kết của dầm. Ở đây các điều kiện đó là :

$z = 0$ và $z = l$ trị số độ võng và mômen là bằng 0.

Như vậy chúng ta phải lần lượt tính các bước như sau :

1. Chọn bước của Δz . Ví dụ ở đây ta chọn $\Delta z = 10\text{cm}$. Nghĩa là ta chia dầm thành 30 đoạn.

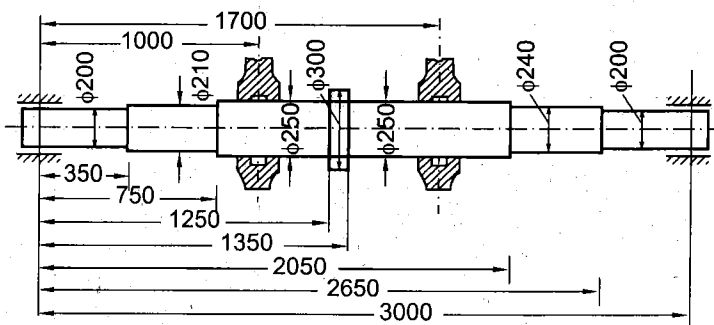
2. Tính trọng lượng bản thân của trục trong từng đoạn

Các trọng lực đó được xem như đặt ở giữa đoạn. Nghĩa là nó cách các mặt cắt của đoạn là 5cm. Ta kí hiệu các lực đó là P_i^I , chỉ số I để chỉ đó là số đo gần đúng thứ nhất. Trọng lượng riêng là $\gamma = 7,8 \cdot 10^{-2} \text{N/cm}^3$.

3. Tính độ cứng khi uốn của trục

Độ cứng khi uốn là tích $EJ = E \cdot \frac{\pi d^4}{64}$. Môđun đàn hồi E được tính với trị số $E = 2 \cdot 10^7 \text{N/cm}^2$.

Với các số liệu đã tính được, lấy số nghịch đảo và đưa vào cột 1 của bảng 19–1.



Hình 19–21

4. Tính trị số mômen uốn trên các mặt cắt

Tính các phản lực ở các gối tựa sau đó tính mômen uốn trên các mặt cắt do phản lực và P_i^I gây nên. Các trị số đó được ghi vào cột III của bảng 19-1.

5. Tính biểu thức $\frac{M_i}{EJ}$ các trị số được ghi vào cột thứ V của bảng 19-1.

6. Tính θ^*

7. Tính y^*

8. Cuối cùng là tính $-y$

Để tính được y ta phải xác định được C_1 và C_2 với điều kiện $z = 0$, $y = 0$ ta tìm thấy $C_2 = 0$.

Từ điều kiện thứ hai. Khi $z = l$ ta có :

$$0 = 226,99 + C_1 \cdot 300$$

Vậy $C_1 = -0,75664$

Trị số của y được tính từ biểu thức :

$$y = y^* - 0,75664 \cdot z$$

Các trị số đã tính, được ghi ở cột thứ 7 của bảng 19 - 1.

Sau khi đã có y ta tiến hành tính :

$$P_i^I y_i \text{ và } P_i^I y_i^2$$

Ta sẽ tìm thấy :

$$\sum_{i=1}^n P_i^I y_i = 2217 \text{ Ncm} \quad \sum_{i=1}^n P_i^I y_i^2 = 118,7 \text{ Ncm}^2$$

Thay vào công thức (19-66) ta được :

$$\omega^2 = 18322 (\text{giây})^{-2} \text{ vậy } \omega = 135,4/\text{giây}$$

Trị số đó mới chỉ là trị số gần đúng thứ nhất. Để đạt được độ chính xác cao hơn, thay vào vị trí của P_i^I ta phải tính các lực quán tính.

Vì độ võng tại điểm thứ i là :

$$y = y_i \sin(\omega t + \varphi)$$

Vậy :

$$\ddot{y} = -y_i \omega^2 \sin(\omega t + \varphi)$$

Lực quán tính cực đại tại i sẽ là $m_i y_i \omega^2$.

Các trị số của P_i^{II} được tính với biểu thức :

$$P_i^{II} = P_i^I \cdot \frac{y_i \omega^2}{g}$$

Bảng 19-1

$z, \text{ cm}$	$\frac{1}{EJ} \frac{1}{\text{Ncm}^2}$	$P_i^I \text{ N}$	$M_i \text{ Ncm}$	$\frac{M_i}{EJ} \frac{1}{\text{cm}}$	θ^*	$y^* \text{ cm}$	$-y \text{ cm}$
0	$6,366 \cdot 10^{-10}$	122	0	0		0	0
10	6,366	245	221000	$0,141 \cdot 10^{-4}$	$0,141 \cdot 10^{-4}$	$0,141 \cdot 10^{-3}$	$7,42 \cdot 10^{-3}$
20	6,366	245	440000	0,280	0,421	0,562	14,57
30	6,366	245	657000	0,418	0,849	1,411	21,29
40	5,277	269	871000	0,460	1,309	2,720	27,55
50	5,277	269	1083000	0,571	1,880	4,600	33,23
60	5,277	269	1291000	0,681	2,561	7,161	38,24
70	5,277	269	1497000	0,790	3,351	10,512	42,45
80	2,602	382	1701000	0,443	3,794	14,306	46,23
90	2,602	382	1900000	0,494	4,288	18,594	49,50
100	2,602	13382	2096000	0,545	4,833	23,427	52,24
110	2,602	382	2158000	0,562	5,395	28,822	54,41
120	2,602	382	2216000	0,577	5,972	34,784	56,01
130	1,255	550	2270000	0,285	6,257	41,041	57,32
140	2,602	382	2319000	0,603	6,860	47,901	58,03
150	2,602	382	2364000	0,615	7,475	55,376	58,12
160	2,602	382	2405000	0,626	8,101	63,477	57,58
170	2,602	20382	2442000	0,635	8,736	72,213	56,41
180	2,602	382	2276000	0,592	9,328	81,541	54,65
190	2,602	382	2106000	0,548	9,876	91,417	52,34
200	2,602	382	1931000	0,502	10,378	101,795	49,53
210	3,064	351	1753000	0,537	10,915	112,710	46,18
220	3,064	351	1572000	0,482	11,397	124,107	42,35
230	3,064	351	1388000	0,425	11,882	135,929	38,10
240	3,064	351	1200000	0,368	12,190	148,119	33,47
250	3,064	351	1009000	0,309	12,499	160,618	28,54
260	3,064	351	815000	0,250	12,749	173,367	23,36
270	6,366	245	617000	0,393	13,142	186,509	17,78
280	6,366	245	416000	0,265	13,407	199,916	11,94
290	6,366	245	206000	0,131	13,538	213,454	5,97
300	6,366	122	00	00	13,538	226,992	0

Ta lập lại quá trình tính toán như trên (bảng 19-2), Cuối cùng ta tìm thấy :

$$\sum_{i=1}^n P_i^{\text{II}} \cdot y_i = 2214 \text{ Ncm} \text{ và } \sum_{i=1}^n P_i^{\text{II}} \cdot y_i^2 = 120,0 \text{ Ncm}^2$$

Bảng 19-2

z, cm	$\frac{1}{EJ} \frac{1}{\text{Ncm}^2}$	$P_i^{\text{II}} \text{ N}$	$M_i \text{ Ncm}$	$\frac{M_i}{EJ} \frac{1}{\text{cm}}$	θ^*	$y^* \text{ cm}$	$-y_1 \text{ cm}$
0	$6,366 \cdot 10^{-10}$	0	0	0		0	0
10	6,366	33,9	214000	$0,136 \cdot 10^{-4}$	$0,136 \cdot 10^{-4}$	$0,136 \cdot 10^{-3}$	$7,37 \cdot 10^{-3}$
20	6,366	66,6	428000	0,273	0,409	0,545	14,48
30	6,366	97,4	642000	0,408	0,817	1,362	21,17
40	5,277	138,4	854000	0,451	1,268	2,630	27,41
50	5,277	167,0	1065000	0,562	1,830	4,460	33,09
60	5,277	192,0	1274000	0,672	2,502	6,962	38,10
70	5,277	213,2	1481000	0,782	3,284	10,246	42,33
80	2,602	329,7	1687000	0,439	3,723	13,969	46,11
90	2,602	353,0	1889000	0,491	4,214	18,183	49,11
100	2,602	13051,5	2087000	0,543	4,757	22,940	52,16
110	2,602	388,0	2155000	0,561	5,318	28,258	54,36
120	2,602	399,4	2219000	0,577	5,895	34,153	55,97
130	1,255	588,6	2279000	0,286	6,181	40,334	57,30
140	2,602	413,9	2333000	0,607	6,788	47,122	58,02
150	2,602	414,5	2383000	0,620	7,408	54,530	58,12
160	2,602	410,6	2429000	0,632	8,040	62,570	57,59
170	2,602	21466,3	2471000	0,643	8,683	11,253	56,42
180	2,602	389,8	2298000	0,598	9,281	80,534	54,65
190	2,602	373,3	2121000	0,552	9,833	90,367	52,33
200	2,602	353,2	1940000	0,505	10,338	100,705	49,50
210	3,064	302,6	1756000	0,538	10,876	111,581	46,14
220	3,064	277,5	1569000	0,481	11,357	122,938	42,29
230	3,064	249,7	1379000	0,423	11,780	134,718	38,02
240	3,064	219,3	1187000	0,364	12,144	146,862	33,39
250	3,064	187,0	992000	0,304	12,448	159,310	38,45
260	3,064	153,1	796000	0,244	12,692	172,002	23,27
270	6,366	81,3	598000	0,381	13,073	185,075	17,70
280	6,366	54,6	399000	0,254	13,327	198,402	11,89
290	6,366	27,3	20000	0,127	13,454	211,856	5,94
300	6,366	0	0	0	13,454	225,310	0

Thay vào (19-66) ta tính được :

$$\omega^2 = 18099 \text{ (giây)}^{-2} \text{ và } \omega = 134,5/\text{giây}$$

Đó cũng chỉ là số gần đúng thứ II, Ta có thể tiến hành với trị số P_i^{III} gần đúng thứ ba :

$$P_i^{III} = P_i^{II} \cdot \frac{y_i \omega^2}{g}$$

Ta sẽ được các kết quả gần đúng thứ ba.

Quá trình tính sẽ dừng lại khi kết quả tính của hai lần liên tiếp không sai khác nhau là bao nhiêu. Dĩ nhiên kết quả tính không thể có độ chính xác hoàn toàn vì có thể có sự sai sót trong mô hình tính, ví dụ gối tựa ở đây được xem là tuyệt đối cứng nhưng trong thực tế có thể có biến dạng đàn hồi nào đó.

2. Phương pháp thông số ban đầu

Ta gọi là thông số ban đầu vì ta sẽ dựa vào các thông số của đoạn đầu để tính dần cho những đoạn tiếp theo. Giả sử tính tần số dao động riêng cho trục bậc trên hình vẽ (h.19-21).

Ở đây chúng ta sử dụng phương trình vi phân dao động (19-59). Phương trình đó được viết lại dưới dạng :

$$(EJy'')'' + \rho Fy'' = 0$$

Ta luôn luôn chọn $y = Z \sin \omega t$ vậy có phương trình :

$$Z^{IV} - \omega^2 \frac{\rho F}{EJ} Z = 0$$

Chuyển phương trình sang dạng không thứ nguyên bằng cách đặt các biến số mới như sau :

$$\eta = \frac{Z}{l}, \xi = \frac{z}{l}, \omega_o^2 = \omega^2 \cdot \frac{\rho F_1 l^4}{EJ_1} \quad (19-67)$$

η tượng trưng cho độ võng

ξ tượng trưng cho biến số z

ω_o tượng trưng cho tần số dao động riêng.

Để có thể thực hiện được phép tính tích phân theo phương pháp tính với các số gia giới nội ta đưa thêm vào các biến số sau đây :

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \eta_1, \frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \eta_2, \frac{d^3\eta}{d\xi^3} = \eta_3$$

η_1, η_2 và η_3 tượng trưng cho góc xoay, mômen uốn và lực cắt. Đạo hàm của lực cắt là lực phân bố. Do đó ta có :

$$\frac{d^4\eta}{d\xi^4} = \frac{d\eta_3}{d\xi} = q_o$$

Phương trình vi phân dao động có thể viết lại dưới dạng :

$$\frac{d^4 \eta}{d\xi^4} - \frac{F}{F_1} \cdot \frac{J_1}{J} \omega_0^2 \eta = 0$$

Trong đó J_1, F_1 là mômen quán tính và diện tích mặt cắt ngang của đoạn đầu và J, F là mômen quán tính và diện tích mặt cắt ngang của đoạn đang xét.

Những biểu thức vi phân định nghĩa trên đây được viết dưới dạng số gia giới nội như sau :

$$\Delta \eta = \eta_1 \Delta \xi, \Delta \eta_1 = \eta_2 \Delta \xi, \Delta \eta_2 = \eta_3 \Delta \xi \quad (19-68)$$

$$\Delta \eta_3 = \frac{F}{F_1} \cdot \frac{J_1}{J} \omega_0^2 \eta \Delta \xi$$

Điều kiện biên của dầm đang xét. Ở gối tựa bên trái với $\xi = 0$ mômen uốn và độ võng là bằng 0 nên ta có :

$$\eta_{\xi=0} = 0 \quad \eta_{2\xi=0} = 0$$

Góc xoay và lực cắt là chưa biết. Ta kí hiệu :

$$\eta_{1\xi=0} = A \text{ và } \eta_{3\xi=0} = B$$

Các trị số đó được xác định từ điều kiện biên ở gối tựa bên phải.

Ta có :

$$\eta_{\xi=1} = 0 \text{ và } \eta_{2\xi=1} = 0$$

Vì hệ là đàn hồi nên $\eta_{\xi=1}, \eta_{2\xi=1}$ phụ thuộc một cách tuyến tính với A và B . Nghĩa là :

$$\eta_{\xi=1} = a_{11}A + a_{12}B = 0$$

$$\eta_{2\xi=1} = a_{21}A + a_{22}B = 0 \quad (19-69)$$

Trong đó $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ là các hệ số chưa biết.

(Hệ phương trình này tương đương với hệ (19-63))

Vậy tần số cần tìm được xác định từ định thức :

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$$

Trình tự tính được tiến hành như sau :

1. Tính

$$f(\xi) = \frac{F}{F_1} \cdot \frac{J_1}{J} = \frac{d_1^2}{d^2}$$

cho các đoạn dầm. Chọn $\Delta \xi = 0,01$, ta chia l làm 100 bước và tính $f(\xi)$ qua một trăm bước đó, sắp xếp thành một bảng số liệu.

Trên mỗi phần nơi nào có đặt đĩa thì ta thay hệ số $\frac{FJ_1}{F_1J}$ bằng trị số $\frac{MJ_1}{M_1J}$, M là khối lượng của đĩa trên một đơn vị chiều dài của trục. M_1 là khối lượng trên một đơn vị chiều dài của đoạn trục ban đầu.

2. Thực hiện tính ω_0

Thay đổi sơ đồ tính một cách gần đúng. Ta xem như trục của thanh có độ cứng không đổi và bằng trị số độ cứng đoạn đầu EJ_1 . Các đĩa chuyển về giữa trục. Trị số tần số dao động riêng của hệ này sẽ là :

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{\delta_{11}m}}$$

Sau khi vẽ biểu đồ mômen đơn vị và thực hiện phép nhân Verèsaghin ta tìm thấy :

$$\omega = \sqrt{\frac{48\rho F_1 l}{M}}$$

Trong đó M là tổng khối lượng của cả hai đĩa

Thay trị số ω đó vào (19-67) ta sẽ tìm thấy :

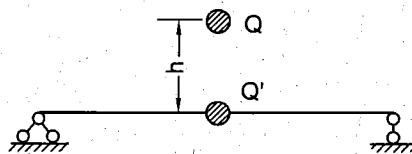
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{48\rho F_1 l}{M}} = 3,26$$

Ta chấp nhận với $\omega_0 = 3,3$

3. Thực hiện các tích phân theo các số gia giới nội (19-68) từ $\xi = 0$ đến $\xi_0 = 1$. Các trị số ban đầu của η và η_2 là bằng không. Dự đoán trị số ban đầu của η_1 và η_3 . Lần đầu giả định $\eta_1 = A = 1$ và $\eta_3 = B = 0$. Lần thứ hai $\eta_1 = A = 0$ và $\eta_3 = B = 1$. Từ biểu thức (19-69) (với $A = 1$ và $B = 0$) $\eta_{\xi=1} = a_{11}$, $\eta_{2\xi} = a_{21}$ và với trường hợp thứ hai ta được a_{12} và a_{22} . Từ đó ta có thể xác định được định thức D . Trị số định thức đó không thể bằng 0. Thêm vào ω_0 giá số $\Delta\omega_0 = 0,1$ và lại tính D . So sánh trị số đó với trị số trước đó. Khi có sự đổi dấu của định thức, chúng ta đã có ω_0 và từ đó tính được ω theo công thức (19-67). Nếu cần thiết phải tìm tần số thứ hai, thứ ba và những tần số tiếp theo thì ta lại lặp lại quá trình trên cho đến khi dấu của D thay đổi. Thời gian thực hiện trên máy cho quá trình đó chỉ tính bằng giây.

§19-12. VA CHẠM THẲNG ĐÚNG CỦA HỆ CÓ MỘT BẬC TỰ DO

Ví dụ ta có dầm đặt trên hai gối tựa mang khối lượng M như trên hình 19-22 gọi Q' là trọng lượng của M . Giả sử có một trọng lượng Q nào đó từ một độ cao h rơi tự do đập vào Q' . Sự va chạm đó được gọi là va chạm thẳng đứng. Mong muốn của chúng ta là tính được độ võng lớn nhất y_d do va chạm gây nên.



Hình 19-22

Ta nhận thấy vận tốc của các khối lượng trên hệ có một sự thay đổi đột ngột, gia tốc sinh ra khá lớn và sự việc xảy ra trong một khoảnh khắc rất ngắn. Để có thể giải được bài toán ta hình dung ra quá trình va chạm thành các bước như sau :

1. Ngay trước khi va chạm Q có vận tốc v_0 . Nếu là sự rơi tự do thì trị số v_0 này là : $v_0 = \sqrt{2gh}$. Khi hai vật thể tiếp xúc nhau chúng sẽ có cùng vận tốc v nào đó và cùng chuyển động đi xuống. Nếu không có một sự mất mát về năng lượng ta có thể dùng định luật bảo toàn động lượng để tính ra v . Thực vậy ta có :

$$\frac{Q}{g} v_0 = \frac{(Q + Q')}{g} v \quad (19-70)$$

Vậy :
$$v = \frac{Q}{Q + Q'} v_0$$

Đó là giai đoạn thứ nhất.

Ta cũng nhận thấy rằng trong thực tế quá trình này phức tạp hơn. Ví dụ độ cứng của dầm khá lớn và trọng lượng Q nhỏ thì Q không gây nên một biến dạng nào của dầm và Q sẽ bị bắn ngược lại hay khi Q có vận tốc khá lớn thì sẽ tạo nên các biến dạng cục bộ. Những trường hợp đó xem như những trường hợp đặc biệt sẽ không đề cập tới ở đây.

2. Bước thứ hai là cả hai vật cùng di động đi xuống gây nên biến dạng của dầm cho đến lúc tạo nên độ võng lớn nhất y_d thì cả hai vật thể cùng dừng lại. Quá trình này có một sự biến đổi lớn về năng lượng. Động năng của hệ khi hai vật bắt đầu di động là :

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{Q + Q'}{g} \right) v^2$$

động năng đó mất dần đi do lực cản đàn hồi của hệ cho đến lúc hệ dừng lại, động năng đó là bằng không. Sự biến thiên của động năng là bằng công của ngoại lực, ở đây là công của lực cản đàn hồi. Ngoài công đó ta nhận thấy trọng lượng Q' và Q đã bị giảm đi một độ cao y_d nên tạo nên một công là : $\Pi = (Q + Q')y_d$.

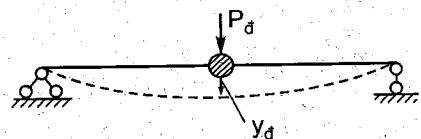
Tổng công do sự biến thiên của động năng và sự giảm thế năng của hệ gây nên là bằng thế năng biến dạng đàn hồi tích lũy trong hệ :

$$U = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q + Q'}{g} v^2 + (Q + Q')y_d$$

Tính được U theo y_d thì ta sẽ được phương trình để xác định y_d .

Ta để ý đến biến dạng của hệ. Giả sử có lực P_d nào đó đặt một cách tĩnh lên hệ, tạo cho hệ một chuyển vị y_d (h.19-23). Công của ngoại lực trong quá trình đó sẽ là :

$$A = \frac{P_d y_d}{2} + Q' y_d$$



Hình 19-23

nếu gọi δ là chuyển vị theo phương của y_d do lực đơn vị gây nên, ta sẽ có biểu thức :

$$y_d = P_d \delta$$

Vậy công A được viết dưới dạng :

$$A = \frac{y_d^2}{2\delta} + Q'y_d$$

Công đó phải bằng thế năng U tích lũy trong hệ. Từ đó ta có phương trình :

$$\frac{y_d^2}{2\delta} + Q'y_d = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q + Q'}{g} v^2 + (Q + Q')y_d$$

Sau khi thay trị số v được tính từ (14–16) và rút gọn ta được phương trình bậc hai đối với y_d .

$$y_d^2 - 2\Delta_t y_d - \frac{\Delta_t v_o^2}{g\left(1 - \frac{Q'}{Q}\right)} = 0$$

trong đó $\Delta_t = Q\delta$ nghĩa là độ võng do Q đặt một cách tĩnh lên dầm gây nên.

Nghiệm của phương trình bậc hai đó là :

$$y_d = \Delta_t \pm \sqrt{\Delta_t^2 + \frac{\Delta_t v_o^2}{g\left(1 + \frac{Q'}{Q}\right)}}$$

Rõ ràng y_d không thể âm nên ta bỏ nghiệm âm của phương trình.

Từ đó ta có :

$$y_d = \Delta_t \left(1 + \sqrt{1 + \frac{v_o^2}{g\left(1 + \frac{Q'}{Q}\right)\Delta_t}} \right)$$

hay :

$$y_d = k_d \Delta_t$$

với trị số của k_d là :

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{v_o^2}{g\Delta_t\left(1 + \frac{Q'}{Q}\right)}} \quad (19-71)$$

Thay trị số của v_o vào ta có :

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\left(1 + \frac{Q'}{Q}\right)\Delta_t}} \quad (19-72)$$

Nếu phải kể đến trọng lượng bản thân của dầm thì ta phải thêm trọng lượng thu gọn của dầm vào trọng lượng Q' . Nếu Q' là bé có thể bỏ qua được thì biểu thức k_d có dạng :

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_t}} \quad (19-73)$$

Trong trường hợp đặc biệt, nếu trọng lượng Q được đặt đột ngột lên dầm, nghĩa là $h = 0$ thì $k_d = 2$. Chuyển vị động lớn gấp hai lần chuyển vị tĩnh.

Ứng suất pháp và tiếp do tải trọng và chạm gây nên được tính với biểu thức :

$$\sigma_d = \sigma_t k_d$$

$$\tau_d = \tau_t k_d$$

σ_t và τ_t là ứng suất do tải trọng và chạm Q đặt một cách tĩnh trên dầm gây nên.

Để giảm k_d người ta tìm cách tăng Δ_t bằng cách giảm độ cứng của hệ đàn hồi hoặc đặt thêm các lò xo đệm tại những nơi va chạm.

Ví dụ 6. Cho một dầm thép chữ I số 22a, đặt trên các gối tựa với đầu thừa như hình 19-24. Một trọng lượng $Q = 200\text{N}$ rơi từ độ cao $h = 4\text{cm}$ xuống đầu tự do của dầm. Không kể đến trọng lượng bản thân của dầm, tính ứng suất lớn nhất trên dầm có tải trọng và chạm gây nên. Nếu tại đầu tự do có đặt một lò xo có độ cứng là $C = 0,01 \text{ mm/N}$, trọng lượng của lò xo và các bộ phận giữ lò xo trên dầm nặng 200N , tính lại trị số ứng suất do va chạm gây nên. Cho $E = 2.10^7 \text{ N/cm}^2$.

Bài giải

Mômen uốn lớn nhất do Q gây nên khi Q được đặt một cách tĩnh lên dầm là (h.19-24) :

$$M_{\max} = Q.3 = 200.3 = 600 \text{ Nm}$$

Ứng suất tĩnh lớn nhất là :

$$\sigma_t = \frac{60000}{251} = 239 \text{ N/cm}^2$$

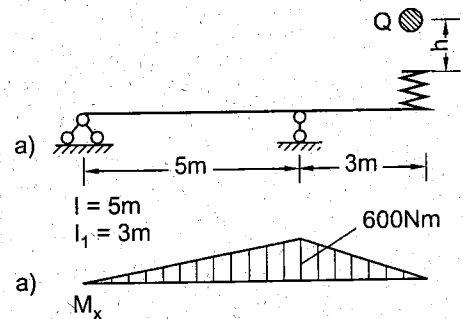
trong đó : $W_x = 251 \text{ cm}^3$.

Độ võng tại đầu mút tự do do lực Q đặt một cách tĩnh lên dầm gây ra là :

$$\Delta_t = \frac{Ql_1^2}{EJ_x} (l + l_1) = \frac{200.3^2.10^4}{2.10^7.2700} (5 + 3).10^2 = 0,08 \text{ cm}$$

Khi ta chưa đặt lò xo, hệ số động sẽ là :

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2.0,04}{8.10^{-4}}} = 11,4.$$



Hình 19-24

Ứng suất va chạm là :

$$\sigma_d = \sigma_t k_d = 239.11,4 = 2724,6 \text{ N/cm}^2$$

Nếu đặt lò xo lên dầm, độ lún của lò xo Q đặt một cách tĩnh lên hệ gây nên là :

$$\lambda = 1.10^{-4}.200 = 0,02\text{m}$$

$$\text{Vậy : } \Delta_t = 0,02 + 0,0008 = 2,08.10^{-2}\text{m.}$$

hệ số động sẽ là :

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_t \left(1 + \frac{Q'}{Q}\right)}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2.0,04}{\left(1 + \frac{200}{200}\right).2,08.10^{-2}}} = 2,7$$

Vậy ứng suất động sẽ là :

$$\sigma_d = 239.2,7 = 645,3 \text{ N/cm}^2$$

Nếu kể đến ứng suất tĩnh do trọng lượng của lò xo và bộ phận giữ lò xo ($Q' = 200\text{N}$) gây nên thì ứng suất toàn phần là :

$$\sigma = \frac{200.300}{251} + 645,3 = 884,3 \text{ N/cm}^2$$

Như vậy là vẫn nhỏ hơn ứng suất động trong trường hợp thứ nhất.

§19-13. VA CHẠM NGANG CỦA HỆ CÓ MỘT BẬC TỰ DO

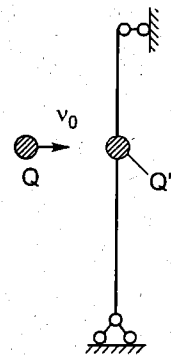
Giả sử dầm được đặt đứng như hình 19-25. Một trọng lượng Q chuyển động bay với vận tốc v_0 đập vào Q' theo phương ngang. Cách va chạm đó ta gọi là va chạm ngang.

Quá trình suy luận cho va chạm đứng đều áp dụng cho va chạm ngang. Khi hai vật thể Q và Q' đã chạm nhau chúng cùng chiều chuyển động theo phương ngang với vận tốc v. Trị số v được xác định từ biểu thức :

$$v = \frac{Qv_0}{Q + Q'}$$

Động năng lúc đó là :

$$T = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2 v_0^2}{g(Q + Q')}$$



Hình 19-25

Vì các khối lượng đều chuyển động theo phương ngang nên thế năng của hệ không biến đổi $\Pi = 0$.

Giả sử có một lực P_d nào đó tác dụng tĩnh lên hệ để gây nên một chuyển vị y_d thì công của ngoại lực là bằng :

$$A = \frac{P_d y_d}{2} = \frac{y_d^2}{2\delta}$$

trong đó δ là chuyển vị do lực đơn vị gây nên. Công đó phải bằng thế năng biến dạng đàn hồi U của hệ. Từ đó ta có phương trình :

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{y_d^2}{\delta} = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q v_o^2}{g \left(1 + \frac{Q'}{Q} \right)}$$

Vậy :

$$y_d = \frac{v_o \Delta_t}{\sqrt{g \Delta_t \left(1 + \frac{Q'}{Q} \right)}}$$

trong đó : $\Delta_t = \delta Q$ là chuyển vị tĩnh do một lực ngang có giá trị bằng Q đặt một cách tĩnh lên dầm gây nên.

Từ đó ta có :

$$y_d = \frac{v_o \Delta_t}{\sqrt{g \Delta_t \left(1 + \frac{Q'}{Q} \right)}} \quad (19-74)$$

Nếu $Q' = 0$ thì ta có :

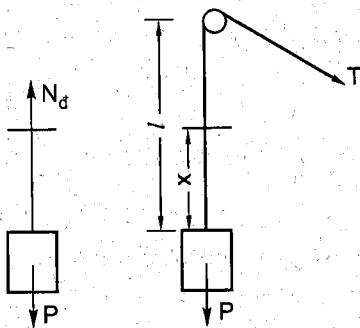
$$k_d = \frac{v_o}{\sqrt{g \Delta_t}} \quad (19-75)$$

§19-14. TÍNH ỨNG SUẤT TRONG CÁC KẾT CẤU CÓ CHUYỂN ĐỘNG VỚI GIA TỐC KHÔNG ĐỔI

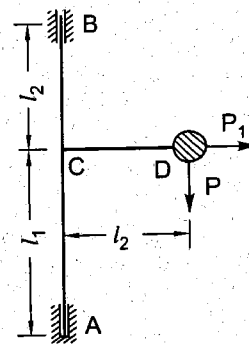
Ví dụ trường hợp dây cáp kéo vật nặng P lên cao với gia tốc a không đổi (h.19-26).

Gọi γ và F là trọng lượng riêng và diện tích mặt cắt ngang của dây cáp.

Gia tốc a được xem là dương khi gia tốc có chiều hướng lên và là âm khi hướng xuống.



Hình 19-26



Hình 19-27

Tính nội lực trên một mặt cắt nào đó cách đầu mút mang tải trọng một khoảng x . Lực dọc N_d không những phải cân bằng với trọng lượng P và trọng lượng của dây cáp mà còn phải cân bằng với lực quán tính, do đó ta có :

$$N_d = P + \gamma x F + (P + \gamma x F) \frac{a}{g}$$

$$N_d = (P + \gamma x F) \left(1 + \frac{a}{g} \right)$$

Vậy : $\sigma_d = \sigma_t k_d$

trong đó : $\sigma_t = \frac{P + \gamma x F}{F}$

và $k_d = 1 + \frac{a}{g}$

Xét ví dụ thứ hai : Một cơ cấu quay có hình dạng như hình 19-27. Bỏ qua trọng lượng bản thân của các thanh. Tính ứng suất trong các thanh khi cơ cấu quay đều với vận tốc góc ω .

Khi quay khối lượng m chịu một lực quán tính li tâm là :

$$P_1 = m \omega^2 l_2 = \frac{P}{g} \omega^2 l_2$$

Lực quán tính đó làm cho thanh CD chịu kéo và thanh AB chịu uốn. Mômen uốn lớn nhất tại mặt cắt tại C là :

$$M_{\max} = \frac{P_1 l_2^2}{l_1 + l_2}$$

Vậy nếu gọi F_{cd} là diện tích mặt cắt ngang của CD và W_x là mômen chống uốn của AB thì ứng suất trong các thanh CD và AB do lực quán tính gây nên là :

$$\sigma_{CD} = \frac{P_1}{F_{cd}} = \frac{P}{g} \omega^2 l_2$$

$$\sigma_{\max(AB)} = \frac{P_1 l_2^2}{(l_1 + l_2) W_x} = \frac{P}{g} \cdot \frac{\omega^2 l_2^3}{(l_1 + l_2) W_x}$$

Ngoài các thành phần ứng suất đó trên các mặt cắt ngang còn có một hệ ứng suất do tải trọng P gây nên mà ở đây ta không tính đến.

§19-15. TỐC ĐỘ TỐI HẠN CỦA TRỤC QUAY

Xét trục quay có mang bánh xe như hình 19-28 do chế tạo không chính xác hoặc do vật liệu không đồng nhất nên trọng tâm của bánh xe không nằm trên trục quay. Trong

trường hợp tốc độ quay không lớn, lực li tâm không đáng kể, trục có thể làm việc bình thường, nhưng khi tốc độ cao đến một giá trị nào đó thì lực li tâm là rất lớn và có thể uốn cong trục, gây nên tiếng ồn trong quá trình máy làm việc. Nếu tăng tốc độ lên cao hơn nữa thì ta lại thấy hiện tượng ngược lại, tiếng ồn giảm đi và độ võng của trục cũng giảm đi. Từ đó ta có định nghĩa như sau :

Ta gọi tốc độ tới hạn là tốc độ góc của trục quay khi trục có độ võng lớn nhất.

Gọi độ võng của trục tại mặt cắt mang bánh xe là y và độ lệch tâm của khối lượng là e , tốc độ góc của trục là Ω và m là khối lượng của bánh xe.

Lực quán tính li tâm sẽ là :

$$F_i = m\Omega^2(e + y)$$

Gọi chuyển vị tại mặt cắt mang bánh xe do lực đơn vị vuông góc với trục đặt tại đó gây ra là δ thì :

$$y = F_i \delta = m\delta\Omega^2(e + y)$$

Từ đó ta có :

$$y = \frac{e\Omega^2}{\frac{1}{m\delta} - \Omega^2} \quad (19-76)$$

Ta thấy y sẽ lớn nhất khi $\Omega^2 = \frac{1}{m\delta}$

Nghĩa là tốc độ tới hạn của trục quay có trị số bằng tần số vòng riêng của hệ :

$$\Omega = \sqrt{\frac{1}{m\delta}} = \omega \quad (19-77)$$

Nếu $\Omega > \omega$, tần số vòng riêng nhỏ hơn tốc độ quay rất nhiều khi đó $y \approx -e$ và trọng tâm của bánh xe sẽ nằm trên trục quay. Điều này có ý nghĩa quan trọng trong chế tạo tuabin và máy li tâm.

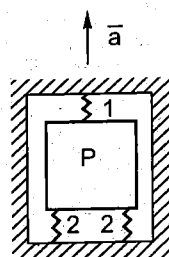


Hình 19-28

Bài tập

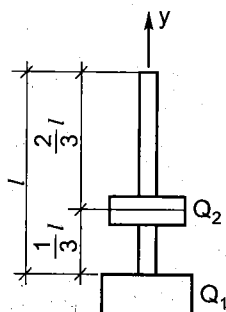
19.1. Một vật nặng P đặt trong một hòm kín với các lò xo có độ cứng C_1 và C_2 như trên hình vẽ 19-29. Hòm kín chuyển động lên cao với gia tốc a . Tính lực tác dụng vào các lò xo.

19.2. Một thanh hình lăng trụ có chiều dài l treo hai vật nặng Q_1 và Q_2 được kéo lên nhanh dần đều, sau thời gian t giây đi

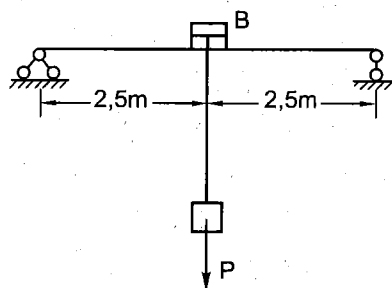


Hình 19-29

được đoạn đường s (h.19–30). Tính diện tích mặt cắt ngang của mỗi đoạn thanh và độ giãn toàn bộ thanh. Cho trọng lượng riêng γ , môđun đàn hồi E và ứng suất cho phép $[\sigma]$.



Hình 19–30

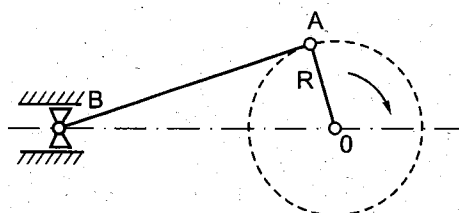


Hình 19–31

19.3. Xác định lực căng trong dây cáp của tời và ứng suất pháp lớn nhất trong dầm. Biết P được nâng lên với gia tốc không đổi và sau giây thứ nhất nó đi được 2,5m.

Cho biết dầm được ghép bằng hai thanh thép chữ I số 30. Tời B có trọng lượng 20kN và $P = 60\text{kN}$ (h.19–31).

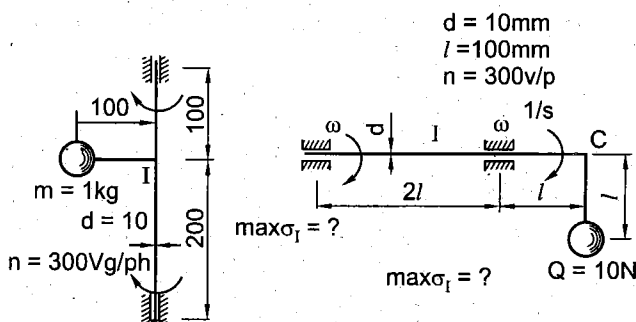
19.4. Một biên AB dài 100cm mặt cắt ngang hình chữ nhật ($b:h = 2:3$) được gắn với tay quay dài $R = 30\text{cm}$. Tay quay có tốc độ 500v/phút. Ở vị trí biên vuông góc với tay quay lực quán tính giả thiết vuông góc với trục của nó. Tính kích thước mặt cắt biên, biết rằng $[\sigma] = 100\text{MN/m}^2$. Khi tính bỏ qua trọng lượng bản thân của biên (h.19–32).



Hình 19–32

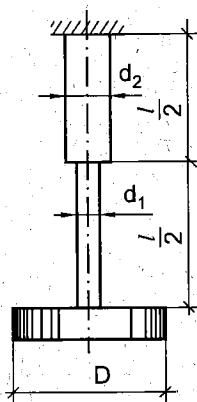
19.5. Trên hình vẽ (h.19–33) biểu diễn hai có cấu quay quanh trục thẳng đứng và trục nằm ngang. Các số liệu đã cho trên hình vẽ.

Tính ứng suất $\sigma_{\max}$ trong các trục quay.

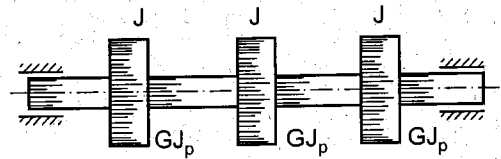


Hình 19–33

- 19.6. Một lò xo hình trụ bằng thép có 20 vòng dây, đường kính trung bình $D = 12\text{cm}$, đường kính sợi lò xo $d = 1\text{cm}$. Lò xo treo một vật nặng 250N . Trọng lượng của lò xo 50N . Tính chu kỳ dao động của lò xo khi có kể và không kể khối lượng của lò xo. Cho $G = 8 \cdot 10^6 \text{N/cm}^2$.
- 19.7. Tính hệ số thu gọn khối lượng trong trường hợp dao động xoắn do trọng lượng bản thân của trục có mặt cắt không đổi, một đầu ngàm, một đầu tự do.
- 19.8. Một trục tròn dài $l = 1\text{m}$. Gồm hai đoạn dài bằng nhau có đường kính $d_1 = 2\text{cm}$, $d_2 = 4\text{cm}$. Đầu trên của trục bị ngàm chặt. Đầu tự do có gắn một đĩa cứng đường kính $D = 3\text{cm}$ trọng lượng 1kN . Hãy tính tần số dao động riêng khi xoắn của trục. Bỏ qua trọng lượng của trục và lấy $G = 8 \cdot 10^6 \text{N/cm}^2$ (h.19–34).



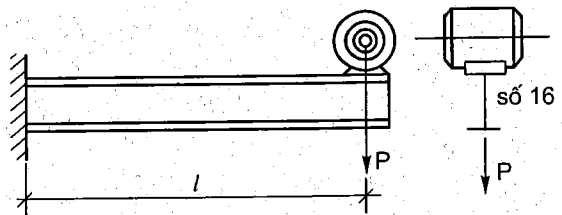
Hình 19-34



Hình 19-35

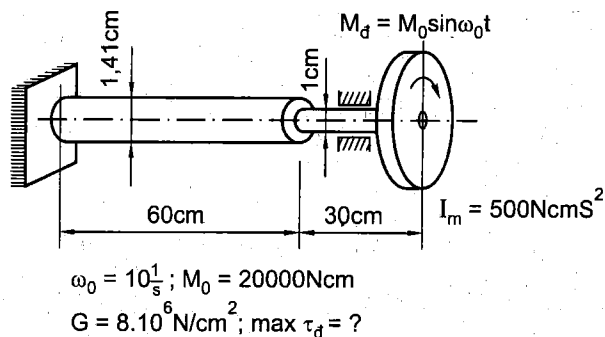
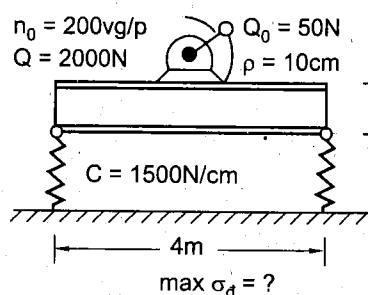
- 19.9. Xác định tần số dao động riêng khi xoắn của trục mang ba vô lăng với mômen quán tính J như hình 19–35.

- 19.10. Một motor điện đặt ở đầu tự do của một côngxon chữ I số 16. Khi làm việc motor tạo ra lực li tâm bằng 500N . Tính chiều dài của dầm để có thể gây ra cộng hưởng. Tính ứng suất pháp lớn nhất khi có cộng hưởng. Cho biết trọng lượng của motor là 2500N . Số vòng quay là 600v/phút . $E = 2 \cdot 10^7 \text{N/cm}^2$ hệ số cản của dao động $\alpha = 2 \text{ 1/sec}$. Bỏ qua trọng lượng của dầm (h.19–36).



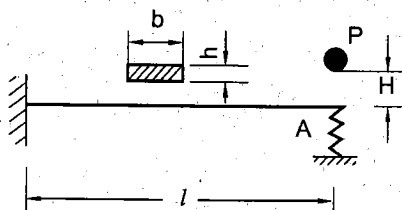
Hình 19-36

- 19.11. Xác định ứng suất động lớn nhất trong hệ dao động cưỡng bức của các hệ trong hình vẽ 19–37. Trọng lượng Q_0 bao gồm cả trọng lượng Q .

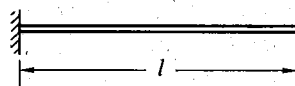


Hình 19-37

- 19.12. Một trọng lượng $P = 50 \text{ N}$ rơi từ một độ cao $H = 10 \text{ mm}$ xuống đầu A của mặt dầm hình chữ nhật $b.h = 50.10 \text{ mm}^2$, dài $l = 500 \text{ mm}$. Đầu A lại có một lò xo đỡ ở dưới. Lò xo có đường kính $D = 100 \text{ mm}$, đường kính sợi thép $d = 10 \text{ mm}$, số vòng làm việc $n = 10$. Cho mô đun đàn hồi $E = 2.10^5 \text{ MN/m}^2$, $G = 8.10^4 \text{ MN/m}^2$. Kiểm tra độ bền của dầm biết rằng $[\sigma] = 100 \text{ MN/m}^2$.



Hình 19-38



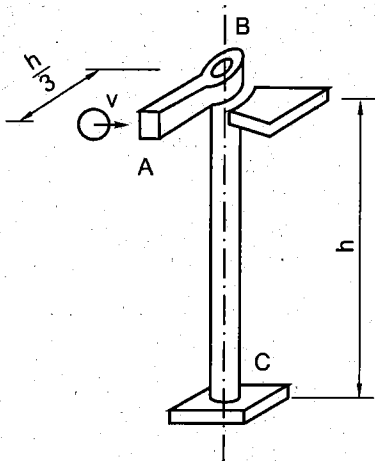
Hình 19-39

- 19.13. Xác định tần số dao động riêng của thanh chịu ngàm chặt một đầu và đầu tự do do trọng lượng bản thân của thanh gây nên (h.19-39).
- 19.14. So sánh hệ số động của một trục tròn bị một vật nặng có vận tốc v va chạm vào tay đòn AB trong hai trường hợp: Trục BC có và không có gối đỡ ở đầu B (h.19-40).

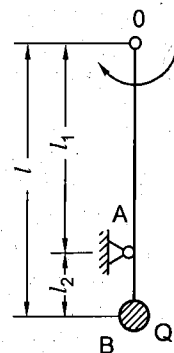
Xem tay đòn AB cứng tuyệt đối và không kể đến trọng lượng của trục.

- 19.15. Một vật nặng Q gắn vào đầu một thanh dài l có độ cứng chống uốn EJ_x quay chung quanh trục O với vận tốc $n \text{ vg/phút}$ (h.14-41).

Thanh bị hãm đột ngột bởi hãm A. Tính mômen uốn cực đại trong thanh khi hãm.



Hình 19-40

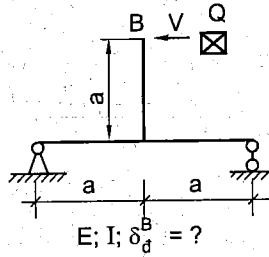


Hình 19-41

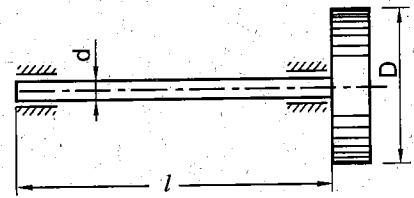
19.16. Xác định chuyển vị động của điểm B khi vật bị va chạm ngang (h.19-42).

Một vô lăng hình tròn đặc đường kính $D = 20\text{cm}$, nặng $M = 40\text{kg}$ gắn vào đầu một trục thép dài $l = 1\text{m}$, đường kính $d = 2\text{cm}$ được quay với tốc độ $n = 200$ vg/phút. Tính ứng suất lớn nhất của trục khi vô lăng bị hãm đột ngột (h.19-43).

Cho $G = 8 \cdot 10^6 \text{N/cm}^2$.

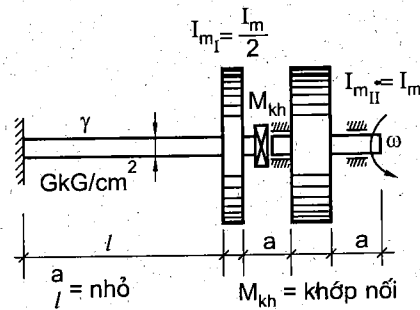


Hình 19-42



Hình 19-43

19.17. Xác định $\max \tau_d$ trong trục do va chạm xoắn khi mắc vào khớp nối M_{kh} . Khớp nối để ghép phần trục bên phải quay với phần bên trái cố định.



Hình 19-44

Ghi chú chương 19

* Phương trình vi phân dạng $y'' + \lambda y = 0$ có ba dạng nghiệm :

$$y = \begin{cases} C_1 \text{ch} x \sqrt{|\lambda_1|} + C_2 \cdot \text{sh} x \sqrt{|\lambda|} & \text{với } \lambda < 0 \\ C_1 + C_2 x & \text{với } \lambda = 0 \\ C_1 \cos x \sqrt{\lambda} + C_2 \sin x \sqrt{\lambda} & \text{với } \lambda > 0 \end{cases}$$

Sách tra cứu về các phương trình vi phân thường $\exists$. Katke (trang 365)

TÍNH ĐỘ BỀN KHI ỨNG SUẤT BIẾN ĐỔI CÓ CHU KÌ

§20-1. KHÁI NIỆM VỀ HIỆN TƯỢNG MỎI

Nhiều chi tiết máy hay công trình, do điều kiện hoạt động và chịu lực của chúng, ứng suất bên trong là hàm số biến đổi theo chu kỳ. Ví dụ trường hợp chịu lực của bánh xe tàu hoả (h.20-1a). Biểu đồ mômen uốn M_x được biểu diễn trên hình 20-1b. Xét ứng suất tại một điểm M nào đó trên chu vi của mặt cắt (h.20-1c). Trị số ứng suất tại đó được tính với biểu thức :

$$\sigma_M = \frac{M_x}{J_x} y$$

y là khoảng cách từ M đến trục trung hòa của mặt cắt. Vì phương chiều của mômen uốn M_x không thay đổi nên đường trung hòa cũng không thay đổi. Nếu gọi ω là tốc độ góc của trục và giả sử ban đầu M nằm trên trục trung hòa thì góc gồm giữa trục trung hòa Ox và bán kính OM sẽ là ωt .

Ứng suất tại M sẽ là :

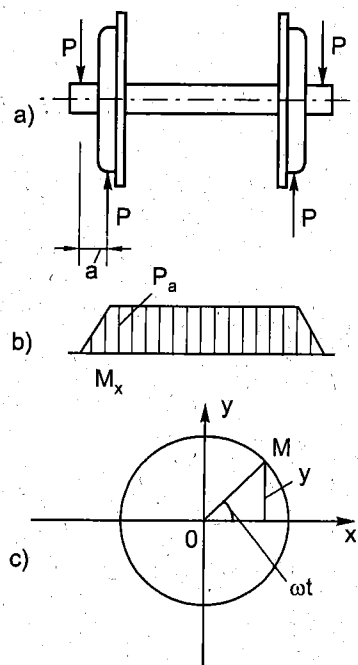
$$\sigma_M = \frac{M_x}{J_x} R \sin \omega t$$

Khi $\omega t = \frac{\pi}{2} + 2K\pi$ thì σ_M đạt đến trị số cực đại.

Ngược lại khi $\omega t = -\frac{\pi}{2} + 2K\pi$ thì σ_M đạt trị số cực tiểu. Nghĩa là ứng suất tại M biến đổi theo các chu trình hay gọi tắt là ứng suất thay đổi. Đã từ lâu người ta nhận thấy nếu vật liệu làm việc dưới tác dụng của ứng suất thay đổi thì mặc dù lực còn thấp so với giới hạn bền, vật liệu vẫn bị phá hỏng.

Sự phá hỏng xảy ra đột ngột, không có biến dạng dư dù chi tiết làm bằng vật liệu dẻo.

Trước đây để giải thích hiện tượng này người ta cho rằng dưới tác dụng của ứng suất thay đổi vật liệu bị "mệt mỏi" đến lúc không chịu lực được nữa thì bị phá hỏng. Cách giải thích này đã "ngự trị" một thời gian dài vì vậy đến ngày nay ta vẫn dùng chữ "mỏi" để chỉ hiện tượng vật liệu bị phá hỏng vì ứng suất thay đổi, dù rằng qua các thí nghiệm tỉ mỉ về tính chất cơ học của vật liệu lấy ra từ các chi tiết bị phá hỏng do ứng suất thay đổi ta không tìm thấy sự khác nhau so với vật liệu trước khi bị phá hỏng.



Hình 20-1

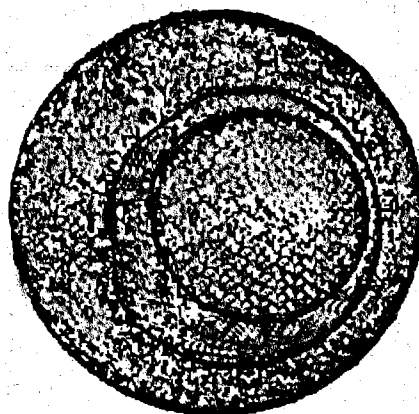
Nguyên nhân gây nên sự phá hỏng được trình bày ở lý thuyết lệch mạng trong vật lý kim loại và trong cơ học phá hủy là sự phát triển của vết nứt vi mô. Ta có thể tóm tắt lý thuyết đó như sau.

Vì một nguyên nhân nào đó, có thể vì cấu tạo của vật liệu, cũng có thể vì khi gia công kim loại, trên chi tiết máy có những vết nứt ban đầu rất bé được gọi là vết nứt vi mô. Vết nứt đó sẽ phát triển nếu có hai điều kiện sau đây :

- Vật liệu phải làm việc dưới tác dụng của ứng suất thay đổi.
- Trị số cực đại của ứng suất thay đổi đó phải vượt quá giới hạn nhất định mà ta sẽ gọi là giới hạn mỏi.

Sự phát triển đó càng ngày càng lớn cho đến khi phần diện tích còn lại của chi tiết không chịu đựng được ngoại lực nữa thì chi tiết bị phá hỏng.

Trên hình 20-2 là mặt cắt ngang của một trục chịu uốn bị phá hỏng vì mỏi. Mặt cắt đó có hai phần : một phần nhẵn và một phần xù xì. Phần nhẵn được giải thích là phần phát triển của vết nứt vi mô. Trong quá trình vết nứt này phát triển dưới tác dụng của ứng suất thay đổi các mặt bị cọ xát với nhau nên được mài nhẵn. Phần xù xì là khi diện tích còn lại của chi tiết không chịu nổi lực nữa nên bị gãy đột ngột, các tinh thể bị phá vỡ tạo nên hình dạng như ta đã thấy.



Hình 20-2

Với quan điểm đó sự nghiên cứu về "mỏi" tập trung vào các mặt sau đây :

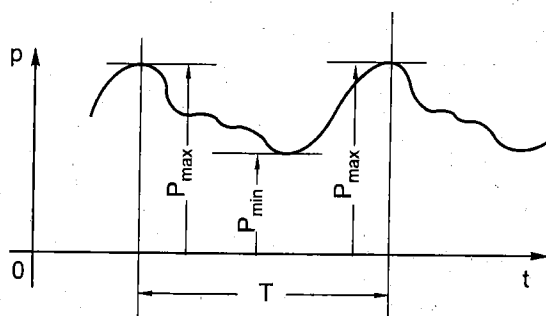
- Xác định giới hạn mỏi cho những chu trình ứng suất khác nhau. Nghĩa là tìm giá trị cực đại giới hạn của ứng suất thay đổi, với giá trị đó vật liệu làm việc lâu dài không bị phá hỏng.
- Tìm những nhân tố ảnh hưởng đến giới hạn mỏi, nghĩa là tìm những nhân tố dễ gây nên các vết nứt vi mô.
- Tìm biện pháp nâng cao giới hạn mỏi nghĩa là tìm các biện pháp hạn chế sự phát sinh ra các vết nứt vi mô.

Ta sẽ lần lượt đề cập đến các vấn đề đó trong những mục tới.

§20-2. PHÂN LOẠI VÀ CÁC ĐẶC TRƯNG CỦA CHU TRÌNH ỨNG SUẤT

Ta gọi một chu trình ứng suất là khi trị số ứng suất p biến thiên từ trị số cực đại sang trị số cực tiểu và về trở lại trị số cực đại. Thời gian thực hiện một chu trình là một chu kỳ (h.20-3).

Qua kinh nghiệm cho thấy cách biến thiên của các hàm ứng suất không ảnh hưởng đến giới hạn mỏi. Yếu tố quyết định đến độ bền mỏi của vật liệu là trị số của ứng suất cực đại và cực tiểu. Từ đó cho phép ta tiến hành các thí nghiệm với bất cứ cách biến thiên nào của ứng suất.



Hình 20-3

Các trị số $p_{\max}$ và $p_{\min}$ trở thành các đặc trưng của chu trình ứng suất. Ngoài hai đặc trưng đó ta còn có đặc trưng khác như sau :

Ứng suất trung bình p_{tb} . Với định nghĩa :

$$p_{tb} = \frac{p_{\max} + p_{\min}}{2} \quad (20-1)$$

Ứng suất biên độ :

$$p_{bd} = \frac{p_{\max} - p_{\min}}{2} \quad (20-2)$$

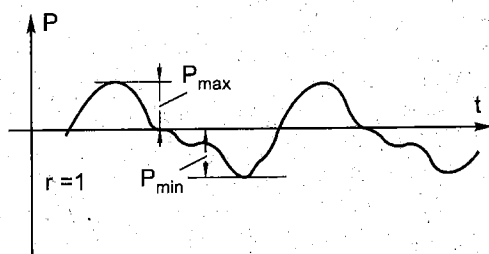
ta nhận thấy p_{bd} bao giờ cũng có giá trị dương.

Hệ số bất đối xứng của chu trình :

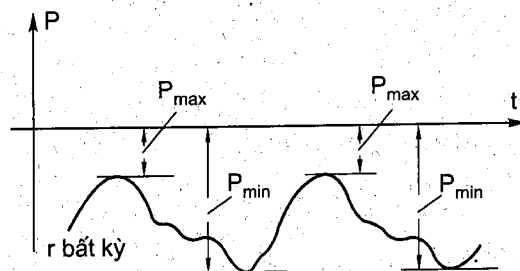
$$r = \frac{p_{\min}}{p_{\max}} \quad (20-3)$$

Từ đó ta có các loại chu trình ứng suất như sau :

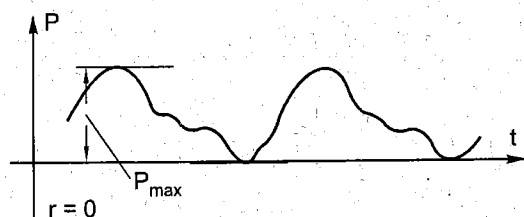
1. Chu trình dương là khi cả $p_{\max}$ và $p_{\min}$ đều có giá trị dương (vật liệu luôn luôn chịu kéo).
 2. Chu trình âm là khi cả $p_{\max}$ và $p_{\min}$ đều có giá trị âm (vật liệu luôn luôn chịu nén).
 3. Chu trình đối xứng : $p_{\max} = -p_{\min}$ vậy $p_{tb} = 0$ và $r = -1$.
 4. Chu trình bất đối xứng là khi r có trị số bất kì.
 5. Chu trình mạch động là khi $r = 0$ hoặc $r = \infty$.
- Các chu trình đó được biểu diễn trên hình 20-4.



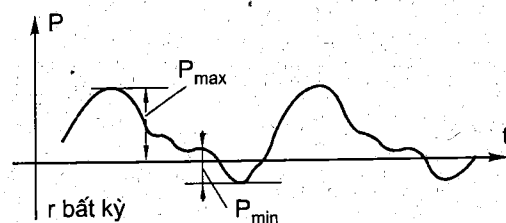
a)



b)



c)



d)

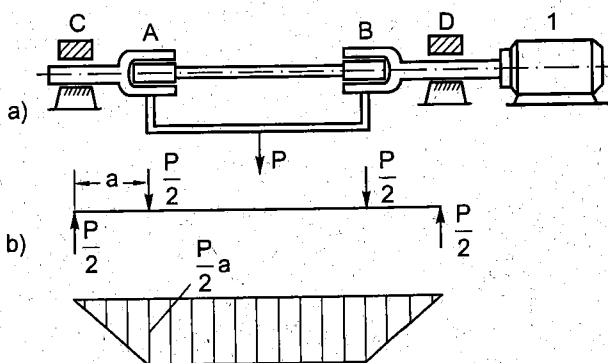
Hình 20-4

Với các định nghĩa đó ta có thể xem ứng suất tĩnh như một trường hợp riêng của các chu trình ứng suất với $p_{\max} = p_{\min}$ nghĩa là $r = 1$.

§20-3. GIỚI HẠN MỎI VÀ BIỂU ĐỘ GIỚI HẠN MỎI

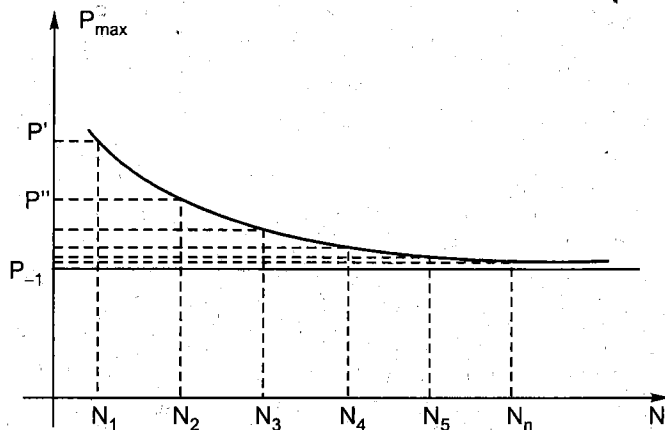
1. Giới hạn mỏi. Chúng ta phải tiến hành các thí nghiệm để tìm ra giới hạn mỏi của các chu trình có hệ số bất đối xứng khác nhau. Các thí nghiệm được thực hiện trên các máy thử mỏi. Thí nghiệm tương đối đơn giản và phổ biến nhất là thí nghiệm uốn để tạo nên một chu trình đối xứng. Sơ đồ máy được biểu diễn trên hình 20-5a.

Mẫu thí nghiệm được lắp vào các ngàm A và B của máy tạo nên một thanh cứng đặt trong các ổ trượt quay C, D. Tải trọng P đặt lên giá treo qua AB tạo nên mômen uốn đối với mẫu thí nghiệm như trên sơ đồ lực (h.20-5b). Giá treo lực đặt trên các ổ bi tại A, B. Do đó khi trục quay, phương của lực P không thay đổi, nghĩa là mômen uốn không đổi. Động cơ (1) có bộ phận đếm vòng và có số vòng quay từ 2000 đến 6000 vòng / phút. Cách tiến hành thí nghiệm theo tiêu chuẩn V.N. Ví dụ thí nghiệm cho 10 mẫu. Với mẫu thứ nhất ta đặt tải trọng P sao cho ứng suất cực đại trên mẫu thử đạt đến giá trị quá 50% giới hạn bền. Trị số



Hình 20-5

này lớn hơn giới hạn mỗi mà ta dự đoán. Sau một số vòng quay nhất định, nghĩa là sau một số chu trình nhất định, giả dụ N_1 chu trình chẳng hạn, mẫu sẽ bị gãy. Tiến hành với mẫu thử thứ hai bằng cách giảm lực P đi. Sau đó đến các mẫu khác. Lần lượt ta sẽ có các số chu trình $N_1, N_2, \dots, N_4$ (tương ứng với sự phá hỏng của vật liệu) ta lập được biểu đồ như hình vẽ (h. 20-6). Biểu đồ đó được gọi là biểu đồ Vêle. Ta nhận thấy đường cong quan hệ giữa $p_{\max}$ và số chu trình N sẽ tiến tiệm cận đến một đường ngang nào đó. Đường đó xác định cho ta giới hạn mỗi p_{-1} vì rằng ứng suất cực đại đạt đến trị số đó vật liệu sẽ làm việc lâu dài dưới tác dụng của ứng suất thay đổi.



Hình 20-6

Theo tiêu chuẩn quy định đối với thép, nếu mẫu thử chịu đựng được 10^7 chu trình mà không bị phá hỏng thì xem là đủ.

Đối với kim loại màu, số chu trình ít nhất cần thực hiện là từ $20 \cdot 10^7$ đến $50 \cdot 10^7$.

Giới hạn mỗi của vật liệu được kí hiệu với chỉ số r (p_r) (r là hệ số bất đối xứng). Trong trường hợp đối xứng giới hạn mỗi là p_{-1} (ở đây chữ p để chỉ chung cho ứng suất pháp và ứng suất tiếp). Trong trường hợp cụ thể chỉ có ứng suất pháp hay ứng suất tiếp, có thể kí hiệu giới hạn mỗi là σ_{-1} hoặc τ_{-1} .

Giới hạn mỗi khi uốn đối với thép thường có quan hệ với giới hạn bền khi kéo như sau :

$$\sigma_{-1}^u = 0,4\sigma_B \quad (20-4)$$

Ta có thể dùng những công thức kinh nghiệm sau đây để suy ra giới hạn mỗi σ_{-1}^r của thép trong các biến dạng kéo nén đối xứng hoặc τ_{-1}^x xoắn đối xứng :

$$\begin{aligned} \sigma_{-1}^r &= 0,7\sigma_{-1}^u = 0,28\sigma_B \\ \tau_{-1}^x &= 0,55\sigma_{-1}^u = 0,22\sigma_B \end{aligned} \quad (20-5)$$

Đối với kim loại màu ta có công thức kinh nghiệm :

$$\sigma_{-1}^u = (0,25 - 0,50)\sigma_B \quad (20-6)$$

σ_{-1}^r là giới hạn mỗi của chu trình đối xứng khi thanh chịu kéo nén đúng tâm.

2. Biểu đồ giới hạn mỗi. Đối với mỗi loại vật liệu giới hạn mỗi phụ thuộc vào hệ số bất đối xứng của chu trình ứng suất. Để diễn đạt một cách tổng quát ta phải tìm cách biểu

diễn giới hạn mỗi theo r trên một biểu đồ nhất định. Biểu đồ đó được gọi là biểu đồ giới hạn mỗi. Có hai loại biểu đồ : một loại vẽ trên tọa độ $p_{\max}$, $p_{\min}$ và biểu đồ vẽ trên tọa độ $p_{bd} - p_{tb}$. Biểu đồ thứ hai này gọi là biểu đồ Còlay. Ta sẽ nói kĩ biểu đồ này vì nó được dùng nhiều trong chế tạo máy.

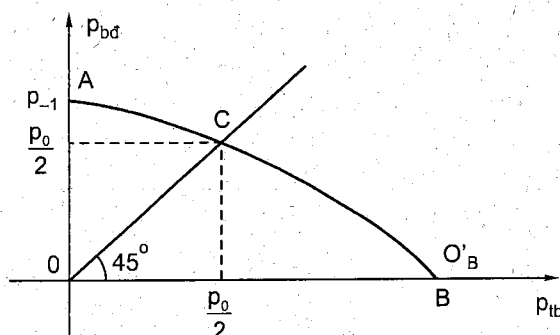
Đem chia (20-2) cho (20-1) ta có :

$$\frac{p_{bd}}{p_{tb}} = \frac{p_{\max} - p_{\min}}{p_{\max} + p_{\min}} = \frac{1 - r}{1 + r}$$

Vậy :

$$p_{bd} = \frac{1 - r}{1 + r} p_{tb} \quad (20-7)$$

Với một trị số r nhất định tương quan giữa p_{bd} và p_{tb} là một đường thẳng qua gốc tọa độ. Nghĩa là, với các chu trình cùng có hệ số bất đối xứng như nhau thì được biểu diễn bằng các điểm trên cùng một đường thẳng. Ví dụ các chu trình mạch động $r = 0$ được biểu diễn bằng các điểm trên đường phân giác của hệ tọa độ hình 20-7. Rõ ràng trên đường đó ta sẽ tìm thấy một điểm C biểu diễn cho giới hạn mỗi p_0 .



Hình 20-7

Tọa độ của C được suy như sau :

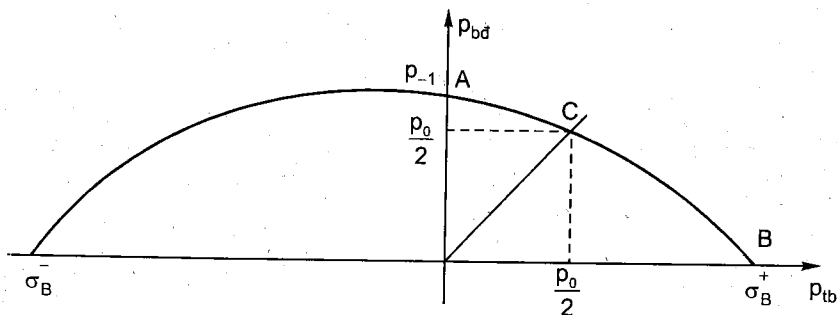
Đem cộng (20-1) và (20-2) ta được : $p_{\max} = p_{bd} + p_{tb}$. Ở đây vì : $p_{bd} = p_{tb}$ và $p_{\max} = p_0$ nên hoành độ và tung độ của C là bằng $\frac{p_0}{2}$.

Các điểm trên trục tung biểu diễn cho các chu trình đối xứng vì với các chu trình đó ta có $p_{tb} = 0$ và $r = -1$. Vì vậy trên trục tung ta sẽ tìm thấy một điểm giới hạn A. Tung độ của A chính là giới hạn mỗi của chu trình đối xứng p_{-1} .

Các điểm trên trục hoành biểu diễn cho các chu trình tĩnh vì $r = 1$, $p_{bd} = 0$. Điểm giới hạn của các chu trình này là giới hạn bên của vật liệu. Ta có $\sigma_B = p_{tb}$. Điểm đó được biểu diễn bằng điểm B trên trục hoành.

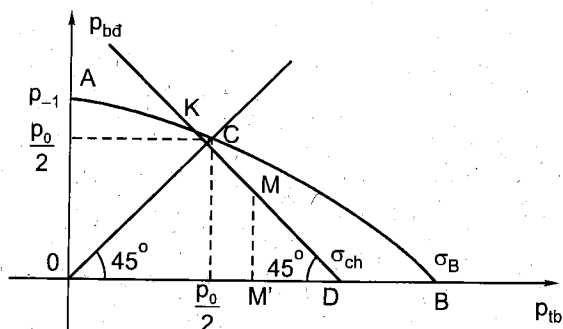
Tiến hành các thí nghiệm với r thay đổi ta sẽ xác định được các điểm giới hạn khác. Nối các điểm đó lại ta được đường cong biểu diễn giới hạn mỗi (h.20-7). Đường cong đó biểu diễn cho các chu trình dương. Đối với vật liệu dẻo ta không tìm thấy giới hạn bên khi nén do đó khi có một chu trình âm ta lấy trị số tuyệt đối của các ứng suất và tính nó như một chu trình dương. Đối với vật liệu giòn biểu đồ giới hạn mỗi có dạng như hình 20-8.

Ta nhận thấy phân âm lớn hơn phân dương vì vậy khi có chu trình âm ta lấy trị số tuyệt đối và tính như một chu trình dương thì hệ số an toàn bao giờ cũng cao hơn. Vì lí do đó sau đây ta chỉ để ý đến phần bên phải của biểu đồ.



Hình 20-8

Đường cong giới hạn mỏi ACB (h.20-7) chia góc phần tư thứ nhất của mặt tọa độ thành hai miền. Với những chu trình ứng suất được biểu diễn bằng một điểm trong miền OACB là những chu trình an toàn, nghĩa là vật liệu có thể làm việc lâu dài dưới tác dụng của chu trình ứng suất đó. Ngược lại, với những chu trình được biểu diễn bằng một điểm bên ngoài OACB thì vật liệu sẽ bị phá hỏng vì mỏi. Nhưng ta cũng không thể sử dụng hết được miền



Hình 20-9

OACB. Trong ngành cơ khí, khi dùng vật liệu chúng ta không được phép để ứng suất vượt quá giới hạn chảy, nghĩa là điểm giới hạn đối với các chu trình ứng suất là khi ứng suất cực đại p_{max} đạt đến giới hạn chảy σ_{ch} . Các điểm giới hạn này nằm trên đường thẳng xuất phát từ điểm D có hoành độ là σ_{ch} và tạo với trục hoành một góc nghiêng 45° (h.20-9).

Gọi giao điểm của đường thẳng đó với biểu đồ mỏi là K. Ta dễ dàng chứng minh rằng một chu trình ứng suất được biểu diễn bởi một điểm M nào đó trên KD có trị số ứng suất cực đại p_{max} bằng σ_{ch} . Thực vậy p_{max} của chu trình ứng suất đó có trị số là :

$$p_{max} = p_{bd} + p_{tb} = \overline{OM'} + \overline{M'M}$$

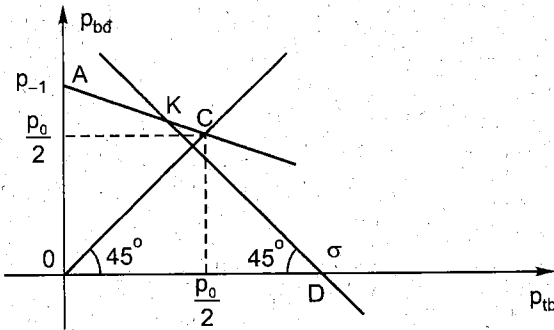
nhưng $\overline{M'M} = \overline{M'D}$ vậy :

$$p_{max} = \overline{OM'} + \overline{M'D} = \overline{OD} = \sigma_{ch}$$

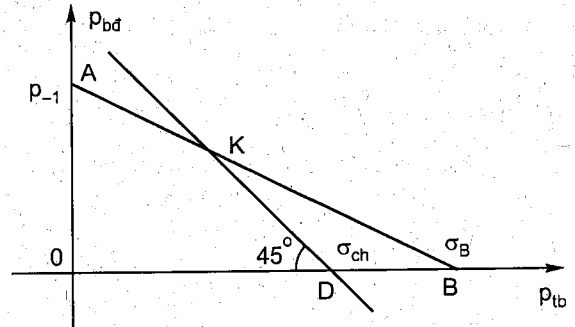
Như vậy khi sử dụng vật liệu dẻo, chúng ta chỉ được phép sử dụng các chu trình ứng suất trong miền AKD. Ta nhận thấy miền đó được chia ra hai vùng rõ rệt. Vùng AOK và vùng KOD. Những chu trình ứng suất có hệ số bất đối xứng r nằm trong vùng AOK, khi chúng ta tăng trị số của p_{max} lên sao cho r không thay đổi thì những chu trình đó bị phá hỏng vì mỏi trước khi p_{max} đạt đến giới hạn chảy. Ngược lại với các chu trình có r nằm

trong vùng KOD trị số $p_{\max}$ sẽ đạt đến giới hạn chảy trước khi đạt đến giới hạn mỏi. Nhận xét đó dẫn đến một kết luận khá quan trọng. Như vậy chúng ta chỉ cần tính toán về mỏi khi r nằm trong miền AOK. Khi r nằm trong miền KOD thì ta chỉ cần so sánh $p_{\max}$ với giới hạn chảy σ_{ch} . Vậy thực tế tính toán chỉ cần đoạn cong AK của biểu đồ giới hạn mỏi. Một cách gần đúng chúng ta có thể thay đoạn cong đó bằng một đoạn thẳng. Từ đó ta có các biểu đồ thu gọn của Xêrenxen và Kinaxôcvilia như sau :

- Thay đoạn cong AC bằng đoạn thẳng AC (h.20-10).
- Thay cả đường cong ACB bằng đường thẳng AB (h.20-11).



Hình 20-10



Hình 20-11

Với cách thu gọn đó ta chỉ cần làm một số thí nghiệm. Ví dụ với biểu đồ thứ nhất ta phải tìm p_{-1} , p_0 và σ_{ch} , với biểu đồ thứ hai ta phải tìm p_{-1} , σ_{ch} và σ_B .

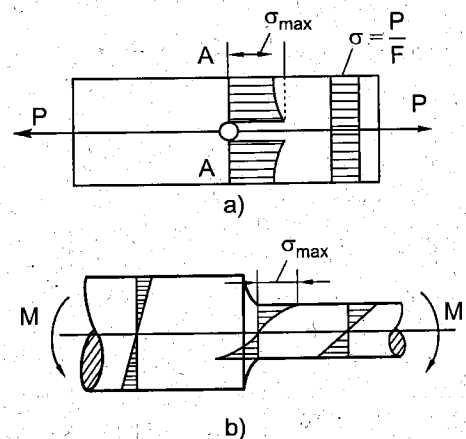
§20-4. CÁC NHÂN TỐ ẢNH HƯỞNG ĐẾN GIỚI HẠN MỎI

Trong phần này chúng ta sẽ kể đến các nhân tố ảnh hưởng đến giới hạn mỏi, nghĩa là những nhân tố dễ tạo nên các vết nứt vi mô làm giảm thấp giới hạn mỏi.

1. Ảnh hưởng của sự tập trung ứng suất

Nhiều thí nghiệm và công trình khoa học đã chứng tỏ rằng ở những nơi có sự thay đổi đột ngột về kích thước và những vùng lắp ghép căng giữa các chi tiết máy có hiện tượng tập trung ứng suất.

Ví dụ một tấm chịu kéo có một lỗ nhỏ (h.20-12a) trên mặt cắt AA. Trên mặt cắt đó ứng suất không phân bố đều nữa. Trạng thái ứng suất vùng mép lỗ là trạng thái ứng suất phẳng và ứng suất tại mép lỗ có trị số lớn hơn ứng suất



Hình 20-12

trên mặt cắt bình thường khác. Tương tự như vậy trong trường hợp trục bậc chịu uốn (h.20-12b) hay là trục lắp ghép căng với ống (h.20-13).

Vùng có ứng suất tập trung là một vùng rất bé trên mặt cắt hoặc trên thanh. Độ lớn của ứng suất tập trung phụ thuộc vào hình dáng kích thước của vùng thay đổi diện tích.

Các trị số của ứng suất tập trung được tính bằng lí thuyết đàn hồi hoặc bằng thực nghiệm quang đàn hồi. Ta gọi hệ số tập trung ứng suất lí thuyết là tỉ số :

$$\alpha = \frac{P_{\max}}{P_{bt}} \quad (20-18)$$

Trong đó : $p_{\max}$ là trị số của ứng suất tập trung và p_{bt} là ứng suất bình thường khi không có nhân tố tập trung ứng suất.

Ví dụ với tấm chịu kéo như trên hình 20-12, $\sigma_{\max}$ là trị số ứng suất ở mép lỗ còn σ_{bt} là ứng suất trên mọi mặt cắt không có lỗ.

Hệ số α được cho trong các sổ tay chế tạo máy hay trong các sách lí thuyết đàn hồi tùy theo các loại nhân tố tập trung ứng suất.

Tùy thuộc vào vật liệu và tính chất của tải trọng mà sự tập trung ứng suất có ảnh hưởng ít hay nhiều đến độ bền mỏi của vật liệu. Cũng vì vậy mà trong tính toán, người ta đưa vào một hệ số được gọi là hệ số tập trung ứng suất thực tế k_r .

$$k_r = \frac{P_r}{P_r^*}$$

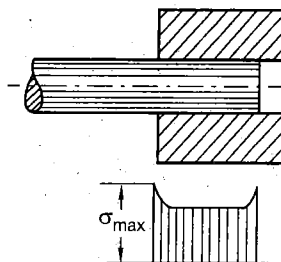
p_r là giới hạn mỏi ở chu trình có hệ số bất đối xứng r trên chi tiết không có nhân tố tập trung ứng suất.

p_r^* là giới hạn mỏi có nhân tố tập trung ứng suất. Ta xét trong hai trường hợp khi $r = 1$ và $r = -1$.

a) Khi $r = 1$. Chu trình ứng suất là chu trình tĩnh ; p_r là giới hạn bền của chi tiết khi không có nhân tố tập trung ứng suất. Trị số của $p_r = \sigma_B$.

p_r^* là giới hạn bền của chi tiết khi có nhân tố tập trung ứng suất.

Đối với vật liệu dẻo thí nghiệm tĩnh chứng tỏ rằng nhân tố tập trung ứng suất không ảnh hưởng gì đến giới hạn bền của vật liệu. Thực vậy, ví dụ ở vùng có ứng suất tập trung, khi tăng lực lên, vùng đó tạo thành một vùng biến dạng dẻo nhưng vùng đó vẫn không có vết nứt, tiếp tục tăng lực lên thì vùng dẻo sẽ lan dần cho đến lúc chiếm toàn bộ diện tích mặt cắt ngang (hình dung với trường hợp tấm chịu kéo (h.20-12)).



Hình 20-13

Điều đó không khác gì với thanh không có nhân tố tập trung ứng suất. Trước khi bị phá hỏng toàn bộ mặt cắt ngang của thanh cũng phải ở tình trạng biến dạng dẻo.

Đối với vật liệu giòn, ví dụ gang chẳng hạn. Trong lòng vật liệu đã có nhiều nhân tố tập trung ứng suất, do đó thí nghiệm cũng chứng tỏ rằng các nhân tố tập trung ứng suất không ảnh hưởng gì đến giới hạn của gang.

Tóm lại đối với tải trọng tĩnh ta luôn có :

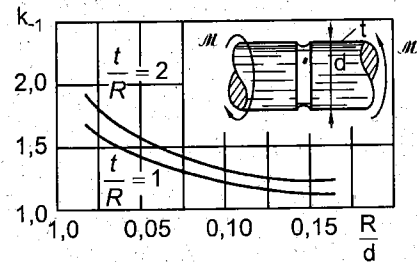
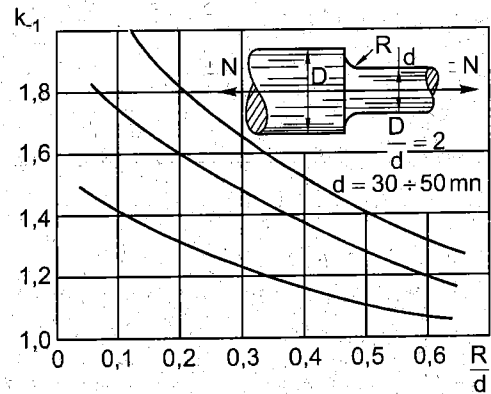
$$p_r^* = \sigma_B$$

Vậy :

$$k_{+1} = 1 \quad (20-9)$$

b) Khi $r = -1$. Trong chu trình đối xứng hệ số tập trung ứng suất thực tế là :

$$k_{-1} = \frac{p_{-1}}{p_{-1}^*}$$



Hình 20-14

p_{-1} là giới hạn mỏi của chu trình ứng suất đối xứng trong chi tiết không có nhân tố tập trung ứng suất.

p_{-1}^* là giới hạn mỏi khi có nhân tố tập trung ứng suất.

Hai trị số đó chỉ có thể xác định bằng thí nghiệm.

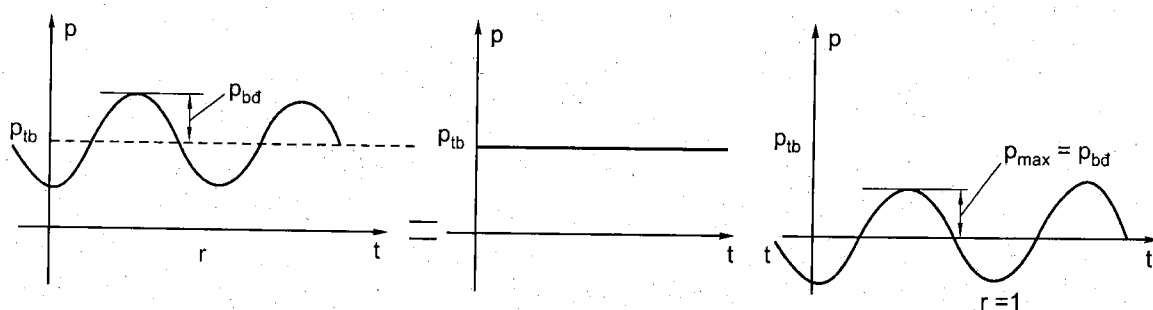
Qua các thí nghiệm người ta đã thiết lập được biểu thức tương quan giữa k_{-1} và α như sau :

$$k_{-1} = 1 + q(\alpha - 1) \quad (20-10)$$

Trong đó : q được gọi là hệ số nhạy của vật liệu. Hệ số đó chỉ phụ thuộc vào tính chất của vật liệu. Ví dụ với thép có độ bền cao giá trị của q gần bằng đơn vị. Với thép xây dựng hoặc thép thường q biến thiên từ 0,6 – 0,8. Đối với gang q gần bằng 0, nghĩa là ảnh hưởng của nhân tố tập trung ứng suất đối với gang không đáng kể. Hệ số nhạy, với mức độ nhất định, phụ thuộc vào hình dáng của chi tiết được xét và nhân tố tập trung ứng suất.

Công thức (20-10) chỉ sử dụng khi không thể có các kết quả thí nghiệm trực tiếp và có thể tính α theo lý thuyết một cách dễ dàng. Thường k_{-1} được cho trực tiếp bằng các kết quả thí nghiệm, ví dụ trên các bảng ở hình 20-14. Trên bảng thứ nhất (h.20-14a) là trị số k_{-1} của trục bậc khi chịu kéo nén liên tục. Các đường cong 1, 2, 3 tương ứng với các loại thép có giới hạn bền khi kéo là $\sigma_B = 40 \text{ kN/cm}^2$, 80 kN/cm^2 và 120 kN/cm^2 . Trên bảng thứ hai (h.20-14b) cho k_{-1} của thanh chịu xoắn có rãnh đối với thép cacbon có giới hạn bền khi kéo $\sigma_B = 50 \text{ kN/cm}^2$.

Một chu trình ứng suất bất kì luôn luôn có thể được xem là sự cộng tác dụng của một chu trình tĩnh với trị số ứng suất là p_{tb} và một chu trình đối xứng với ứng suất cực đại bằng p_{bd} (h.20-15).



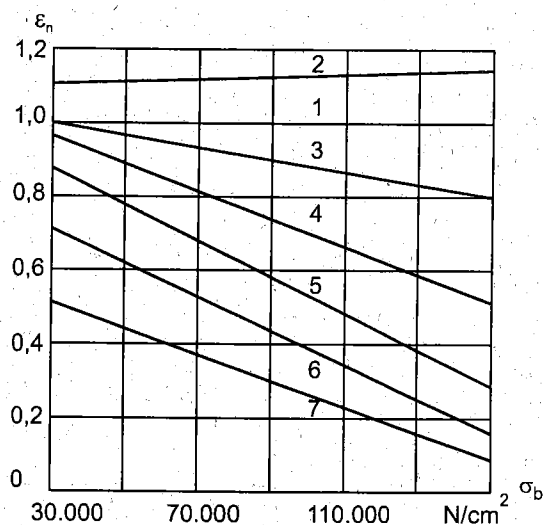
Hình 20-15

Nhân tố tập trung ứng suất không ảnh hưởng gì đến chu trình tĩnh, nghĩa là không ảnh hưởng đến p_{tb} . Nhân tố đó chỉ ảnh hưởng đến chu trình đối xứng, nghĩa là đến p_{bd} . Nhận xét đó rất quan trọng để ta có thể tính toán độ bền sau này.

2. Ảnh hưởng của độ nhẵn bề mặt và kích thước của chi tiết

Ta nhận thấy bề mặt của chi tiết càng nhẵn thì giới hạn mỏi càng cao. Điều đó có thể giải thích là bề mặt càng nhẵn thì càng ít nhân tố gây nên vết nứt vi mô. Như ta đã nói các vết nứt đó chỉ phát sinh và phát triển khi vật liệu chịu tác dụng của ứng suất thay đổi. Nghĩa là với một chu trình tĩnh thì bề mặt nhẵn hay không, không có ảnh hưởng gì đến độ bền của vật liệu. Cũng vì vậy chúng ta chỉ xét đến ảnh hưởng đó đối với chu trình đối xứng. Ta gọi hệ số bề mặt là tỉ số :

$$\varepsilon_n = \frac{p_{-1}}{p_{-1\pi}} \quad (20-11)$$



Hình 20-16

Trong đó : p_{-1} là giới hạn mỏi trong chu trình đối xứng của mẫu có bề mặt nhẵn theo tiêu chuẩn ;

$p_{-1\pi}$ là giới hạn mỏi của mẫu có bề mặt tương tự bề mặt của chi tiết máy.

Hình 20-16 đưa ra trị số của hệ số bề mặt đối với các loại thép có giới hạn bền khác nhau :

Hệ số bề mặt của bề mặt tiêu chuẩn xem như bằng đơn vị (đường 1). Đường 2 đối với bề mặt được đánh bóng. Đường 3 đối với các bề mặt được tạo nên bằng phương pháp cắt

gọt. Đường 4 với các bề mặt được tạo nên bằng cách dũa tinh. Đường 5 với các bề mặt tạo nên bằng phương pháp cán. Các đường 6, 7 là các chi tiết có bề mặt bị ăn mòn trong nước ngọt và nước mặn.

Như vậy là đối với một chu trình bất kỳ hệ số bề mặt chỉ ảnh hưởng đến p_{tb} , hệ số đó không ảnh hưởng đến p_{bd} như lập luận ở trên.

Ta để ý đến một nhân tố khác ảnh hưởng đến giới hạn mỏi đó là hệ số kích thước. Chi tiết càng to giới hạn mỏi càng thấp. Cách giải thích cũng tương tự như cách giải thích đối với hệ số bề mặt. Vật càng to khuyết tật trong lòng càng nhiều càng dễ gây nên vết nứt vi mô. Rõ ràng các vết nứt đó chỉ có thể phát sinh và phát triển khi vật liệu chịu tác dụng của ứng suất thay đổi. Do đó, một chu trình tĩnh, kích thước của chi tiết không ảnh hưởng gì đến giới hạn bền của vật liệu. Ảnh hưởng đó chỉ xảy ra với ứng suất thay đổi, nghĩa là với chu trình đối xứng. Ta có định nghĩa sau đây. Hệ số kích thước : ϵ_M là tỉ số :

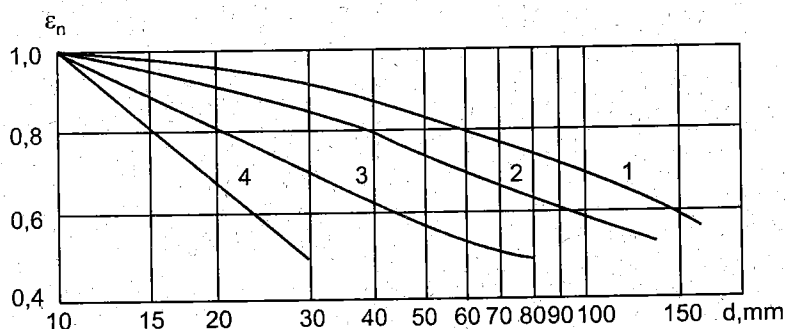
$$\epsilon_M = \frac{p_{-1d}}{p_{-1}} \quad (20-12)$$

p_{-1d} là giới hạn mỏi trong chu trình đối xứng của chi tiết có kích thước thực.

p_{-1} là giới hạn mỏi của mẫu có kích thước theo tiêu chuẩn ($d = 8 - 12\text{mm}$).

Ta giả thiết rằng bề mặt của chi tiết và mẫu thí nghiệm là có chất lượng như nhau :

Hình 20-17 cho ta trị số của ϵ_M đối với các trục chịu uốn và chịu xoắn theo đường kính của chúng.



Hình 20-17

Đường 1 là cho thép cacbon không có các nhân tố tập trung ứng suất. Đường 2 cho thép hợp kim có giới hạn bền từ $100\text{kN/cm}^2 - 120\text{kN/cm}^2$ và không có các nhân tố tập trung ứng suất. Đường 4 cho các loại thép có nhiều nhân tố tập trung ứng suất.

Trong bảng 1 cho ta một số giới hạn mỏi trong chu trình đối xứng với các mẫu thí nghiệm có đường kính khác nhau.

Cũng giống như trên, đối với một chu trình bất kỳ hệ số kích thước chỉ ảnh hưởng trực tiếp đến p_{bd} , hệ số đó không ảnh hưởng đến p_{tb} .

Bảng 1

d(mm)		Giới hạn mỗi $\sigma_{-1}(\text{N/cm}^2)$					
		Thép cacbon		Thép hợp kim			
15	25000	26500	32000	38000	44000	50000	60000
30	21000	22500	27000	32000	37000	42000	50000
60	17500	19000	22500	27000	31000	35000	42000
100	16000	17000	20000	24000	28000	31500	38000
$\delta_b \text{N/cm}^2$	45000	55000	65000	80000	88000	98000	120000
$\delta_{ch} \text{N/cm}^2$	25000	31000	36000	56000	61000	73000	100000

§20-5. HỆ SỐ AN TOÀN VỀ MỎI

Để kiểm tra điều kiện bền của một chu trình ứng suất với hệ số bất đối xứng r thì việc làm bình thường là phải dựa vào biểu đồ giới hạn mỗi để xác định giới hạn mỗi p_r và đem so sánh $p_{\max}$ với p_r . Điều kiện bền vì mỏi là :

$$p_{\max} \leq p_r \quad (1)$$

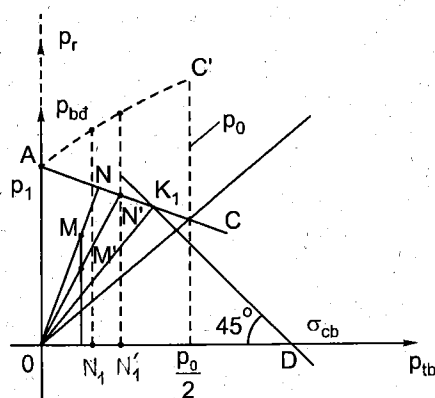
Tỉ số $n = \frac{p_r}{p_{\max}}$ càng lớn thì càng an toàn, vì vậy tỉ số này được gọi là hệ số an toàn.

Để thuận tiện hơn người ta dựa vào biểu đồ giới hạn mỗi để thiết lập một cách tổng quát công thức của hệ số an toàn n và so sánh hệ số an toàn đó với một hệ số an toàn ấn định trước $[n]$ được gọi là hệ số an toàn cho phép. Nếu như $n > [n]$ thì vật liệu là an toàn về mỏi.

Cách thiết lập công thức của hệ số an toàn n như sau :

Tính đến các nhân tố ảnh hưởng đến giới hạn mỗi; theo đề nghị của Xêrenxen và Kinaxôcvilia ta tăng biên độ của chu trình ứng suất thực lên một lượng $\frac{k_{-1}}{\varepsilon_n \cdot \varepsilon_M}$. Sở dĩ như vậy

vì các nhân tố đó chỉ ảnh hưởng đến σ_{bd} . Cách làm đó dẫn đến việc tăng cao hệ số an toàn thực tế lên so với hệ số tính toán nên có thể chấp nhận được.



Hình 20-18

Thực vậy gọi M' là điểm biểu diễn cho chu trình ứng suất tác dụng lên chi tiết máy. M' nằm trong miền OAK (h.20-18). Giới hạn mỗi của M' là điểm N' giao điểm của tia OM' và

đường AC. Nếu bây giờ ta tăng biên độ của M' lên một lượng là $\frac{k_{-1}}{\varepsilon_n \varepsilon_M}$ nghĩa là ta sẽ biểu diễn chu trình ứng suất đó tại M. Giới hạn mỗi tương ứng với M là N, một điểm gần với giới hạn mỗi trong chu trình đối xứng mà ta biết rằng giới hạn mỗi của chu trình đối xứng là bé nhất (quan sát biểu đồ, tại C ta lấy tung độ gấp đôi để có điểm biểu diễn cho p_0). Vậy giới hạn mỗi tương ứng với N là bé hơn đối với N'. Do đó hệ số an toàn trong thực tế sẽ lớn hơn hệ số an toàn tính toán.

Gọi hình chiếu của M và N lên trục hoành là M_1, N_1 (h.20-19). Xét hai tam giác đồng dạng OMM_1 và NN_1 ta có :

$$\frac{NN_1}{MM_1} = \frac{ON_1}{OM_1} = \frac{ON_1 + N_1 N}{OM_1 + MM_1} = \frac{p_r}{p_{\max}} = n_p \quad (2)$$

Ta tìm cách tính ON_1 .

Từ A vẽ đường ngang song song với trục hoành. Giao tuyến của đường đó với các đường song song với trục tung qua N và C là I và H. Sử dụng hai tam giác đồng dạng ANI và ACH ta có :

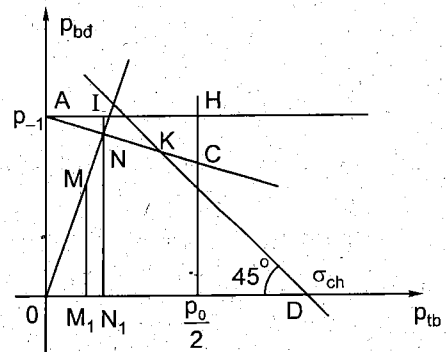
$$\frac{AI}{AH} = \frac{IN}{HC}$$

hay :

$$\frac{ON_1}{\frac{p_0}{2}} = \frac{p_{-1} - NN_1}{p_{-1} - \frac{p_0}{2}} \quad (3)$$

Do đó ta có :

$$ON_1 = \frac{p_{-1} - NN_1}{\psi} \quad (4)$$



Hình 20-19

Trong đó :

$$\psi = \frac{2p_{-1} - p_0}{p_0} \quad (20-13a)$$

Đem thay (4) vào (2) ta có :

$$\frac{NN_1}{MM_1} = \frac{p_{-1} - NN_1}{\psi OM_1} = n_p \quad (5)$$

Từ đó ta có :

$$n_p = \frac{p_{-1}}{MM_1 + \psi OM_1}$$

Hay :

$$n_p = \frac{p_{-1}}{\frac{k_{-1}}{\varepsilon_n \varepsilon_M} \cdot p_{bd} + \psi p_{tb}} \quad (20-14a)$$

Nếu sử dụng biểu đồ mỗi thứ hai (h.20-20) ta sẽ tính hệ số an toàn như sau: tương tự như trên ta sẽ sử dụng bốn tam giác: OM_1M đồng dạng với ON_1N , ANI đồng dạng với ABH . Từ đó ta có:

$$\frac{ON_1}{\sigma_B} = \frac{p_{-1} - NN_1}{p_{-1}}$$

Hay

$$ON_1 = \frac{p_{-1} - NN_1}{\frac{p_{-1}}{\sigma_B}}$$

Từ đó ta lại có:

$$\frac{NN_1}{MM_1} = \frac{ON_1}{OM_1} = \frac{p_{-1} - NN_1}{\psi OM_1} = n_p$$

Và cuối cùng

$$n_p = \frac{p_{-1}}{\frac{k_{-1}}{\varepsilon_n \varepsilon_M} \cdot p_{bd} + \psi' p_{tb}} \quad (20-14b)$$

trong đó:

$$\psi' = \frac{p_{-1}}{\sigma_B} \quad (20-13b)$$

Trong các công thức (20-14) ta dùng chữ p để chỉ chung cho ứng suất pháp và ứng suất tiếp. Khi trạng thái ứng suất là trạng thái đơn ta có:

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{k_{-1}}{\varepsilon_n \varepsilon_M} \cdot \sigma_{bd} + \psi \sigma_{tb}}$$

trong đó:

$$\psi = \frac{2\sigma_{-1} - \sigma_o}{\sigma_o}$$

Với biểu đồ mỗi thứ hai vị trí của ψ thay bằng ψ'

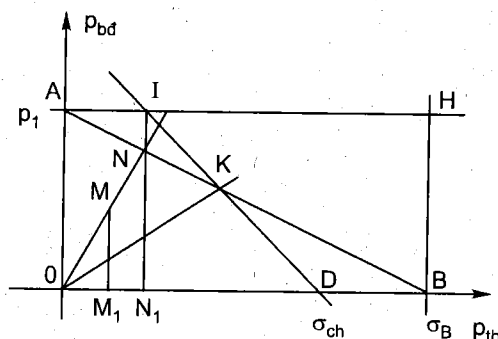
$$\psi' = \frac{\tau_{-1}}{\tau_B}$$

Khi trạng thái ứng suất là trạng thái trượt thuần túy ta có:

$$n_\tau = \frac{\tau_{-1}}{\frac{k_{-1}}{\varepsilon_n \varepsilon_M} \tau_{bd} + \psi \tau_{tb}}$$

trong đó:

$$\psi = \frac{2\tau_{-1} - \tau_o}{\tau_o}$$



Hình 20-20

Với biểu đồ mỗi thứ hai vị trí của ψ được thay bằng ψ' với :

$$\psi' = \frac{\tau_{-1}}{\tau_B}$$

Trường hợp uốn và xoắn đồng thời, ta có thể áp dụng công thức kinh nghiệm sau đây để tính hệ số an toàn :

$$\frac{1}{n_r^2} = \frac{1}{n_\sigma^2} + \frac{1}{n_\tau^2}$$

hay

$$n_r = \frac{n_\sigma n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}} \quad (20-15)$$

Còn vấn đề lớn nữa mà ta phải giải quyết là làm thế nào để xác định được rằng M (điểm tương trưng cho chu trình ứng suất) nằm trong vùng AOK (h.20-21). Vì chỉ khi M nằm trong vùng đó thì ta mới tính với giới hạn mỏi. Nếu M thuộc vùng KOD thì ta chỉ cần tính như tải trọng tĩnh, nghĩa là :

$$P_{\max} \leq \sigma_{ch}$$

hệ số an toàn sẽ là :

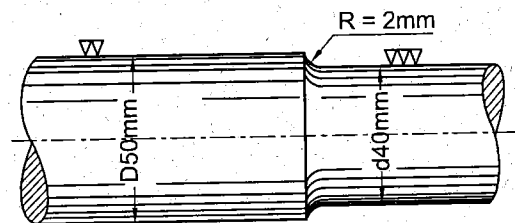
$$n_T = \frac{\sigma_{ch}}{P_{\max}} \quad (20-16)$$

Ta gọi n_T là hệ số an toàn về chảy. Tỉ số đó là tỉ số giữa các đoạn ON và OM (N là giao điểm của OM với đường KD). Gọi N' là giao điểm của OM với biểu đồ mỏi ta thấy ON' lớn hơn ON, do đó nếu tính n_p thì trị số của n_p sẽ lớn hơn n_T .

Ngược lại, khi M thuộc vùng AOK ta nhận thấy ON' nhỏ hơn ON nghĩa là n_p nhỏ hơn n_T .

Từ đó ta đề ra cách tính như sau : Ta không cần biết M thuộc vùng nào. Ta phải tính cả hai hệ số n_T và n_p . Luôn luôn lấy trị số nhỏ hơn để so sánh với hệ số an toàn cho phép [n].

Ví dụ 1. Một trục bậc (h.20-22) được chế tạo từ thép 0,6% cacbon, chịu uốn. Các đặc trưng cơ học của vật liệu là : $\sigma_B = 75 \text{ kN/cm}^2$; $\sigma_{ch} = 42 \text{ kN/cm}^2$ và $\sigma_{-1} = 32,5 \text{ kN/cm}^2$. Bề mặt của trục được mài nhẵn.



Hình 20-22

Mômen uốn có trị số không đổi suốt thời gian trục quay là $M = 64 \text{ kNcm}$. Kiểm tra điều kiện bền của trục, cho biết hệ số an toàn cho phép $[n] = 1,5$.

Bài giải

Trục chịu uốn quay đều và mômen uốn không đổi nên chu trình ứng suất ở đây là chu trình đối xứng.

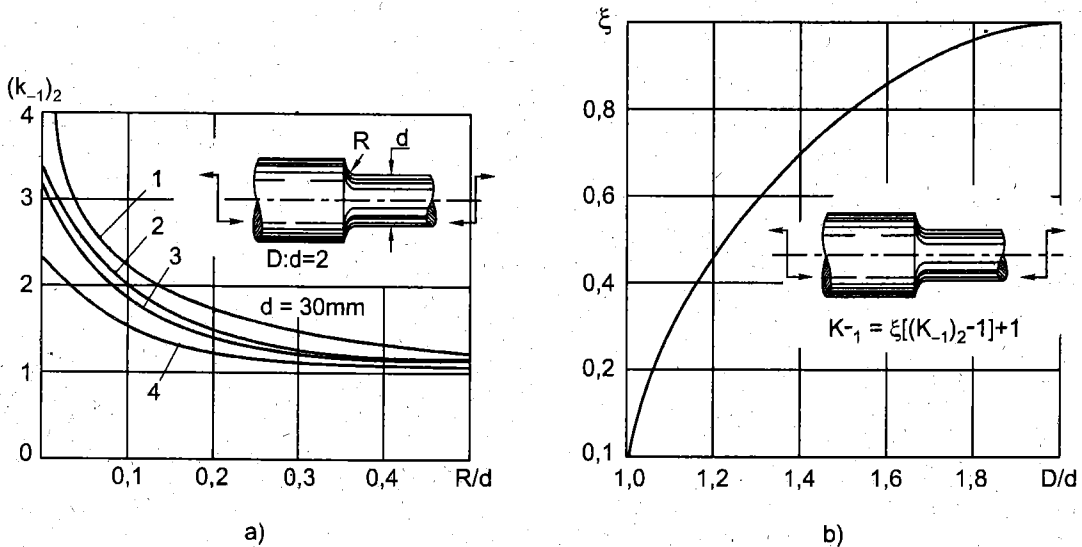
$$\sigma_{\max} = |\sigma_{\min}| = \frac{M_x}{W_x} = \frac{64}{0,1.4^3} = 10 \text{ kN/cm}^2$$

Hệ số an toàn chảy sẽ là :

$$n_T = \frac{42}{10} = 4,2$$

Hệ số an toàn về mỏi được tính với công thức (20-14).

Hệ số ứng suất tập trung thực tế được tính theo các bảng như trên hình 20-23.



Hình 20-23

Hình 20-23a cho trị số $(k-1)_2$ của trục bậc khi bị uốn với tỉ số $\frac{D}{d} = 2$.

Đường 1 cho thép với $\sigma_B = 120 \text{ kN/cm}^2$.

Đường 2 cho thép $\sigma_B = 100 \text{ kN/cm}^2$ và đường 3 cho thép $\sigma_B = 80 \text{ kN/cm}^2$ và đường 4 cho các loại thép $\sigma_B = 60 \div 40 \text{ kN/cm}^2$.

Hình 20-23b cho hệ số điều chỉnh khi $\frac{D}{d}$ không phải là 2.

Trong ví dụ ta đang xét vì $\sigma_B = 75 \text{ kN/cm}^2$ nên ta sử dụng đường 3 để xác định $(k-1)_2$. Với tỉ số $\frac{R}{d} = \frac{2}{40}$ ta tìm thấy $(k-1)_2 = 2,2$. Với tỉ số $\frac{D}{d} = \frac{50}{40} = 1,25$ ta tìm thấy trị số hệ số hiệu chỉnh $\xi = 0,52$. Từ đó ta có :

$$k-1 = 1 + \xi[(k-1)_2 - 1] = 1 + 0,52(2,2 - 1) = 1,63$$

Hệ số kích thước ε_M được xác định theo đường 2 của bảng trên hình 20-17. Với $d = 40\text{mm}$, $\varepsilon_M = 0,78$.

Bề mặt của trục được mài nhẵn vậy $\varepsilon_n = 1$.

Từ đó ta có :

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{k_{-1}}{\varepsilon_n \varepsilon_M} \cdot \sigma_{bd} + \psi' \sigma_{tb}} = \frac{0,78 \cdot 32,50}{1,63 \cdot 10,00} = 1,6$$

vì n_σ nhỏ hơn n_T nên ta phải lấy n_σ so sánh với $[n]$ ta có :

$$n_\sigma > [n]$$

Vậy trục đạt được điều kiện an toàn.

Ví dụ 2. Trục bậc trên đây làm việc dưới tác dụng của mômen xoắn theo chu trình bất đối xứng. Trị số mômen xoắn lớn nhất là $\mathcal{M} = 80\text{kNcm}$, mômen xoắn cực tiểu là $\mathcal{M} = -20\text{kNcm}$. Cơ tính của vật liệu như sau :

$\tau_B = 40\text{kN/cm}^2$; $\tau_{-1} = 19\text{kN/cm}^2$; $\sigma_B = 60\text{kN/cm}^2$. Xác định hệ số an toàn mỗi của chi tiết.

Bài giải

Trị số các ứng suất cực đại và cực tiểu là :

$$\tau_{\max} = \frac{80}{0,2 \cdot 4^3} = 6,25 \text{ kN/cm}^2$$

$$\tau_{\min} = \frac{-20}{0,1 \cdot 4^3} = -1,56 \text{ kN/cm}^2$$

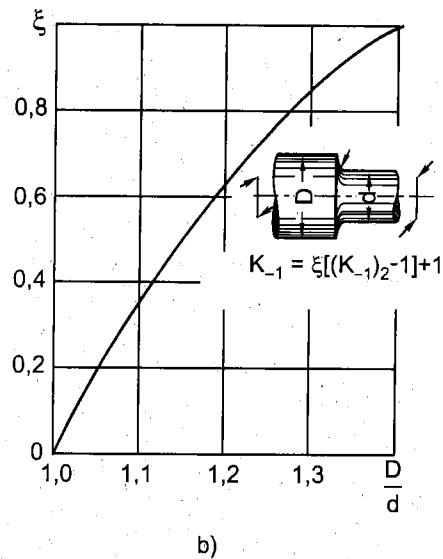
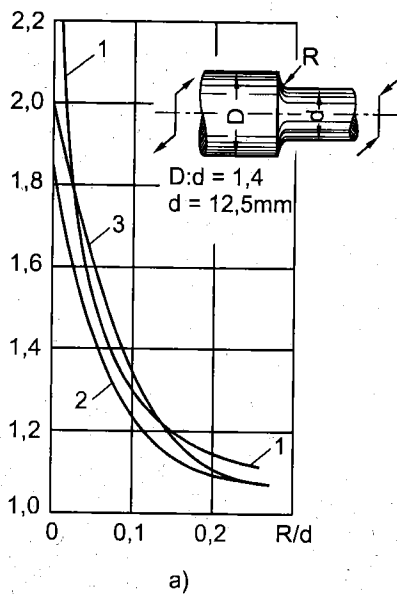
Từ đó ta có trị số ứng suất biên độ và ứng suất trung bình là :

$$\tau_{bd} = 3,9 \text{ kN/cm}^2 ; \tau_{tb} = 2,35 \text{ kN/cm}^2$$

Hệ số ứng suất tập trung thực tế được tra bảng ở hình 20-24.

Bảng trên hình 20-24a là hệ số tập trung ứng suất thực tế đối với các mẫu thí nghiệm có $d = 12,5$ và tỉ số $\frac{D}{d} = 1,4$ khi xoắn. Đường 1 cho phép có giới hạn bền $\sigma_B = 120\text{kN/cm}^2$. Đường 2 cho các loại thép có $\sigma_B = 60\text{kN/cm}^2$ và đường 3 cho các loại thép có $\sigma_B = 40\text{kN/cm}^2$. Đối với các trục có tỉ lệ $\frac{D}{d}$ khác 1,4 thì ta dùng hệ số hiệu chỉnh ξ cho trên bảng (h.20-24b), k_{-1} được tính với công thức :

$$k_{-1} = \xi[(k_{-1})_{1,4} - 1] + 1$$



Hình 20-24

Trong ví dụ đang xét ta dùng đường 2. Với tỉ số $\frac{R}{d} = 0,05$, $(k_{-1})_{1,4} = 1,36$. Với tỉ số $\frac{D}{d} = 1,25$, hệ số hiệu chỉnh $\xi = 0,76$. Từ đó ta có :

$$k_{-1} = 0,76[1,36 - 1] + 1 = 1,27$$

Vì trục được mài nhẵn nên $\epsilon_n = 1$. Hệ số kích thước cũng tra bảng như ví dụ uốn trên đây $\epsilon_M = 0,78$.

Từ đó :

$$n_\tau = \frac{\tau_{-1}}{\frac{k_{-1}}{\epsilon_n \epsilon_M} \tau_{bd} + \psi'_{tb}} = \frac{19}{\frac{1,27}{0,78} \cdot 3,9 + \frac{19}{40} \cdot 2,35} = 2,5$$

Ví dụ 3. Xác định hệ số an toàn của trục I (h.20-25) mômen xoắn $\mathcal{M} = 100 \text{ kN.cm}$. Đường kính trục là 50mm, kích thước đến các ổ trượt là $a = 20 \text{ cm}$, $b = 8 \text{ cm}$. Bán kính của bánh xe là $R = 8 \text{ cm}$. Vật liệu của trục là thép cacbon với $\tau_{ch_2} = 25 \text{ kN/cm}^2$, $\sigma_{-1} = 30 \text{ kN/cm}^2$. Hệ số ứng suất tập trung thực tế do lắp ghép căng là $k_{-1} = 1,4$. Trục được mài nhẵn.

Bài giải

Dưới tác dụng của mômen xoắn không đổi, trên mặt cắt ngang của trục luôn có một hệ ứng suất tiếp không đổi theo thời gian.

$$\tau_B = \frac{\mathcal{M}}{0,2d^3} = 4,00 \text{ kN/cm}^2$$

Hệ số an toàn
chảy của vật liệu là :

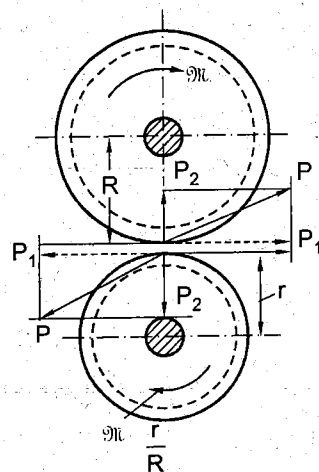
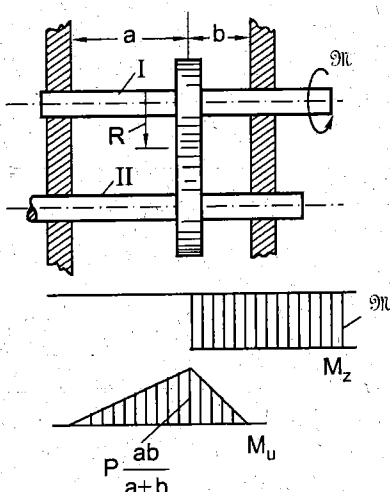
$$n_{\tau} = \frac{\tau_{ch}}{\tau_B} = \frac{25}{4} = 6,2$$

Ngoài mômen
xoắn đó trục sẽ bị
uốn bởi lực P là lực
tương tác giữa hai
bánh xe (h.20–25b).

Theo lí thuyết sự
ăn khớp của bánh
răng ta có :

$$P_2 \approx 0,4P_1$$

Do đó :



Hình 20–25

$$P = \sqrt{P_1^2 + P_2^2} = 1,08P_1$$

Từ điều kiện cân bằng của trục I ta có :

$$P_1 = \frac{M}{R} ; P = 1,08 \frac{M}{R}$$

Lực đó sẽ gây nên ứng suất thay đổi trên trục. Chu trình đó là chu trình đối xứng.

$$\sigma_{\max} = \sigma_{bd} = \frac{M_x}{0,1d^3} = 1,08 \frac{M}{R} \cdot \frac{ab}{a+b} \cdot \frac{1}{0,1d^3}$$

$$\sigma_{\max} = 6,16 \text{ kN/cm}^2 ; \sigma_{tb} = 0$$

Theo bảng (h.20–17) ta tìm thấy $\epsilon_M = 0,75$. Từ đó ta có hệ số an toàn vì mỏi là :

$$n_{\sigma} = \frac{\epsilon_n \epsilon_M}{k_{-1} \sigma_{bd}} \cdot \sigma_{-1} = 2,6$$

Trạng thái ứng suất ở đây là trạng thái ứng suất phẳng vì cùng có τ và σ tác dụng đồng thời, vì vậy hệ số an toàn của trục I sẽ là :

$$n_r = \frac{n_{\sigma} n_{\tau}}{\sqrt{n_{\sigma}^2 + n_{\tau}^2}} = 2,4$$

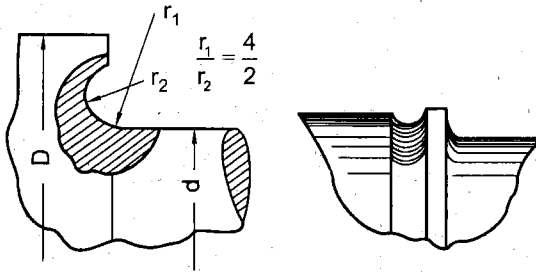
§20–6. NHỮNG BIỆN PHÁP NÂNG CAO GIỚI HẠN MỎI

Biện pháp nâng cao giới hạn mỏi là tránh phát sinh ra các vết nứt vi mô. Những nơi có ứng suất tập trung thường là những chỗ dễ tạo nên các vết nứt vi mô, do đó phải tránh hết sức các nhân tố tạo nên ứng suất tập trung, ví dụ :

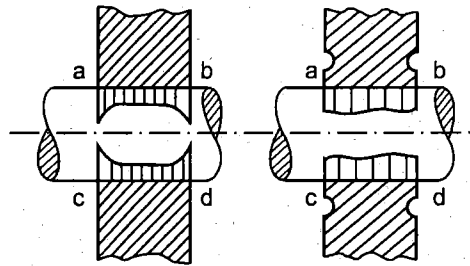
a) Tăng bán kính chỗ lượn. Để đảm bảo cho bán kính ở chỗ lượn đủ lớn ta có thể làm chỗ lượn ăn vào bên trong của chi tiết như hình 20–26.

b) Làm các rãnh để điều hòa ứng suất (h.20–26). Rãnh tiện ở đầu búa tán đỉnh nhằm giảm bớt chênh lệch đột ngột giữa hai phần có độ cứng khác nhau, từ đó hạ thấp ứng suất tập trung giữa hai phần.

c) Giảm bớt ứng suất tập trung khi lắp ghép căng bánh xe bằng cách khoét rãnh trên bánh xe (h.20–27).



Hình 20–26



Hình 20–27

d) Mài nhẵn, đánh bóng hoặc mạ bề mặt chi tiết để từ bỏ các vết nứt phát sinh trong quá trình gia công.

e) Làm cứng mặt ngoài bằng cách cán lăn hoặc phun hạt gang lên bề mặt, bằng phương pháp hóa nhiệt như thấm cacbon, nitơ hoặc bằng phương pháp tôi cao tần...

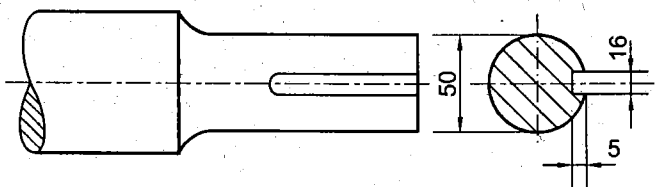
Bài tập

20.1. Trên hình (20–28) biểu diễn một đầu trục có rãnh then, chịu mômen xoắn thay đổi từ 0 đến 110 kNcm.

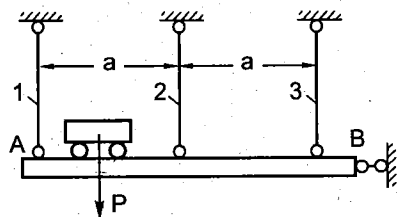
Xác định hệ số an toàn mỗi tại mặt cắt ngang có rãnh then. Trục bằng thép 60 có các đặc trưng sau : $\sigma_b = 750 \text{ N/mm}^2$

$$\tau_{-1} = 190 \text{ N/mm}^2, \beta = 0$$

Khi tính lấy $\alpha_m = 1$.



Hình 20–28



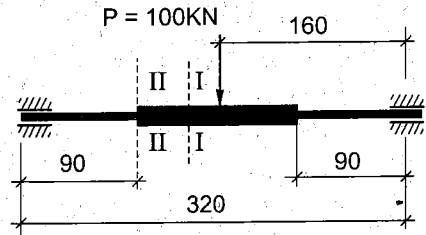
Hình 20–29

20.2. Tải trọng P chạy đi chạy lại trên dầm tuyệt đối cứng AB. Xác định giá trị cho phép của tải trọng P theo điều kiện bền của các thanh treo (h.20–29). Các thanh treo 1, 2, 3 có cùng đường kính $d = 40 \text{ mm}$ cùng chiều dài và được làm bằng thép 25.

$\sigma_{ch} = 250\text{N/mm}^2$, $\sigma_{-1k} = 135\text{N/mm}^2$. Hệ số an toàn cho phép $[n] = 1,5$.

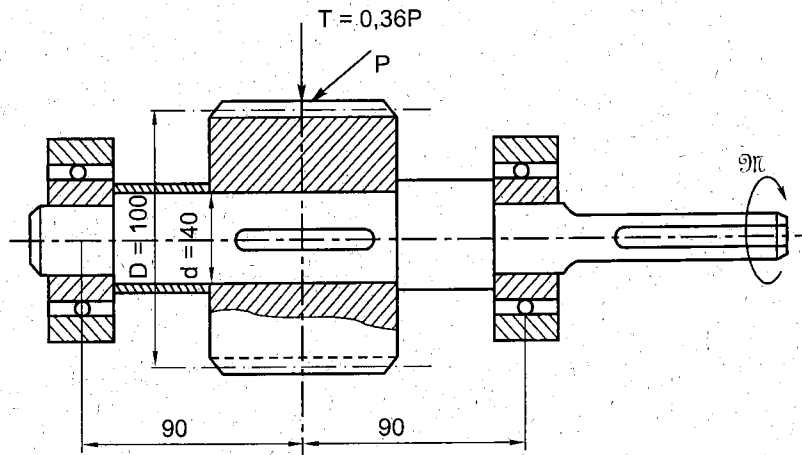
Khi tính lấy $k_r = 2,5$, $\psi = 0,08$.

- 20.3.** Một trục hình bậc có sơ đồ như trên hình 20–30. Khi trục quay, phương và độ lớn của lực P không đổi. Đường kính phần giữa $D = 115\text{mm}$, đường kính phần bên $d = 90\text{mm}$. Bán kính lượn giữa hai phần $r = 4\text{mm}$, phần giữa có rãnh then rộng $b = 36\text{mm}$, sâu $t = 12\text{mm}$. Trục bằng thép 60 có $\sigma_{-1} = 325\text{N/mm}^2$, $\sigma_b = 750\text{N/mm}^2$. Tính hệ số an toàn ở mặt cắt I – I và II – II. Khi tính lấy $\beta_m = 1$.



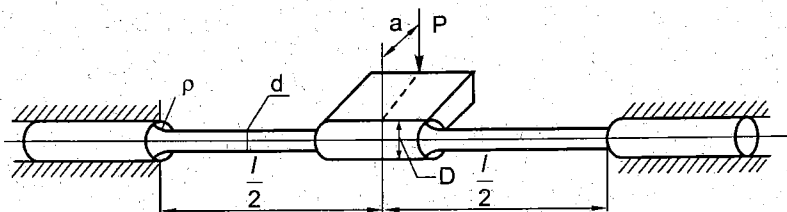
Hình 20–30

- 20.4.** Một trục mang bánh răng trụ nhận được từ động cơ điện một công suất $N = 29,4\text{kW}$ khi quay với tốc độ $n = 800\text{vg/ph}$ (h.20–31). Xác định hệ số an toàn mỗi ở mặt cắt ngang giữa nhịp có rãnh then với kích thước : rộng $b = 14\text{mm}$, sâu $t = 4\text{mm}$. Trục bằng thép 45 có $\sigma_{-1} = 275\text{N/mm}^2$, $\psi = 0,17$. Khi tính lấy $\beta_m = 1$.



Hình 20–31

- 20.5.** Thanh hình trụ bằng thép, mặt cắt tròn, đường kính $d = 30\text{mm}$ được ngàm ở các đầu. Trên phần nhô ra của thanh chịu một lực tác dụng P thay đổi theo chu trình đối xứng. Xác định trị số lực lớn nhất P_{max} cho biết mác của thép là $40 \times H$ có $\sigma_b = 900\text{MN/m}^2$, $\sigma_{-1} = 400\text{MN/m}^2$, $\tau_{-1} = 240\text{MN/m}^2$. Đường kính phần giữa của thanh $D = 60\text{mm}$. $\rho/d = 0,1$; ρ là bán kính lượn ở chỗ nối; $l = 32\text{cm}$; $a = 10\text{cm}$; $[n] = 1,6$ (h.20–32).



Hình 20–32

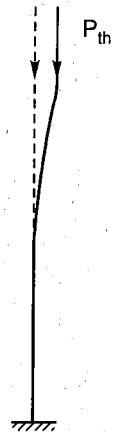
§21-1. KHÁI NIỆM

Ngoài việc tính độ bền, độ cứng ta còn phải chú ý tính sự ổn định của công trình hay chi tiết máy. Sự mất ổn định của một thanh trong công trình, một chi tiết máy trong cơ cấu, có thể dẫn đến sự phá hoại cả công trình hay cơ cấu máy.

Xét thanh chịu nén đúng tâm như hình 21-1. Giả sử chiều dài l của thanh lớn gấp nhiều lần so với kích thước mặt cắt ngang. Khi trị số P chưa đáng kể, nếu ta dùng một lực xô ngang R đẩy thanh lệch ra khỏi vị trí cân bằng thì sau khi bỏ R đi thanh trở lại vị trí thẳng đứng ban đầu. Trạng thái đó được gọi là trạng thái ổn định của thanh.



Hình 21-1



Hình 21-2

Bây giờ ta tăng dần lực P lên, khi P đạt đến một giá trị nhất định, giá trị này được gọi là giới hạn (kí hiệu P_{th}) ta thấy hiện tượng khác với trước. Khi chưa có lực xô ngang thanh vẫn thẳng đứng, vẫn cân bằng với P_{th} . Nhưng trạng thái đó là trạng thái không ổn định gọi là mất ổn định, vì nếu có một lực R xô ngang đẩy thanh lệch ra khỏi vị trí cân bằng thì sau khi bỏ lực xô ngang, thanh không trở lại trạng thái thẳng đứng ban đầu nữa, thanh bị uốn cong (h.21-2). Vật liệu lúc này vẫn còn làm việc trong giới hạn đàn hồi (vì $P_{th} < P_{đh}$) nhưng thanh đang ở trong trạng thái nguy hiểm.

Trong một công trình lớn chỉ cần một thanh bị *mất ổn định* thì cả công trình biến thành một cơ cấu không còn khả năng chịu lực nữa. Thực tế đã có nhiều cầu lớn bị phá hỏng vì nguyên nhân này, vì vậy ta phải tính sự ổn định của công trình. Vấn đề cơ bản là xác định lực tới hạn (P_{th}).

Hiện tượng mất ổn định đã được nhận biết từ lâu, song việc tính lực tới hạn thì phải chờ đến Olev mới có được lời giải đúng đắn.

§21-2. BÀI TOÁN OLEV (1774)

Olev đặt vấn đề tính lực tới hạn cho một thanh chịu nén đúng tâm có liên kết hai đầu là các gối tựa (h.21-3).

Giả sử lực P đã đạt đến giá trị lực tới hạn P_{th} , nếu có một lực xô ngang thanh sẽ bị uốn cong, sự uốn đó xảy ra trong mặt phẳng có độ cứng nhỏ nhất. Khi lực xô ngang đã bị bỏ đi

rồi thanh vẫn ở trạng thái cong đó. Gọi độ võng tại một mặt cắt z nào đó $y(z)$ (h.21-3) thì mômen uốn trên mặt cắt đó là :

$$M_x = P_{th} \cdot y(z) \quad (1)$$

Trục x ở đây là trục mômen quán tính cực tiểu vì dầm sẽ bị uốn quanh trục đó. Để hình dung được dễ dàng ta ví dụ mặt cắt ngang của dầm là hình chữ nhật. Hình dạng của dầm khi bị uốn được biểu diễn như trên hình 21-4.

Giả sử vật liệu còn làm việc trong giới hạn đàn hồi, phương trình vi phân của đường đàn hồi sẽ là :

$$y'' = -\frac{M_x}{EJ_x} \quad (2)$$

Tất nhiên ở đây xem biến dạng là bé, độ võng y chưa đáng kể nên có thể sử dụng phương trình vi phân gần đúng đó.

Thay (1) vào (2) ta được phương trình :

$$y''(z) + \alpha^2 y(z) = 0 \quad (3)$$

trong đó

$$\alpha^2 = \frac{P_{th}}{EJ_x} \quad (21-1)$$

Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân (3) là :

$$y(z) = C_1 \sin \alpha z + C_2 \cos \alpha z \quad (4)$$

C_1 và C_2 là các hằng số tích phân được xác định bởi các điều kiện liên kết của dầm. Ta có các điều kiện đó như sau :

$$\text{Khi } z = 0, \quad y = 0 \quad (a)$$

$$\text{Khi } z = l, \quad y = 0 \quad (b)$$

Từ điều kiện (a) tìm thấy ngay $C_2 = 0$. Từ điều kiện (b) ta có :

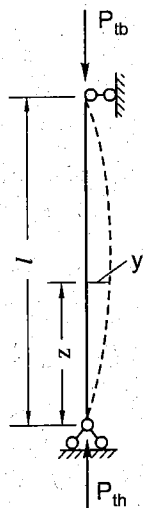
$$y(l) = C_1 \sin \alpha l = 0 \quad (5)$$

Như vậy phải có hoặc $C_1 = 0$ hoặc $\sin \alpha l = 0$. Nếu $C_1 = 0$, điều đó có nghĩa là $y(z) \equiv 0$, dầm không có độ võng. Trạng thái đó không phải là trạng thái mất ổn định. Vậy ta chỉ còn lại điều kiện thứ hai là :

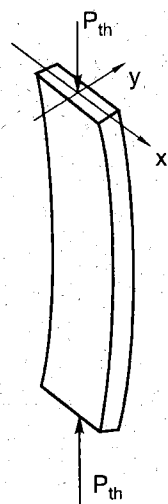
$$\alpha l = k\pi \quad (6)$$

Bình phương hai vế lên và thay (21-1) vào ta có :

$$P_{th} = \frac{k^2 \pi^2 EJ_x}{l^2}$$



Hình 21-3



Hình 21-4

k ở đây là các trị số nguyên dương, vậy trị số lực tới hạn bé nhất là $k = 1$. Ta có trường hợp thanh hai đầu có liên kết khớp lực tới hạn bằng :

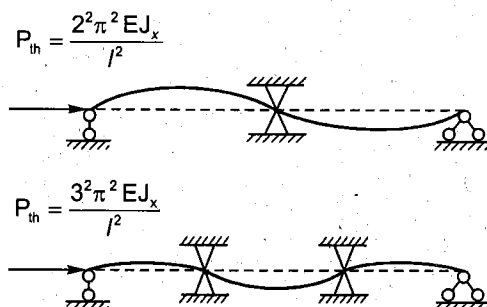
$$P_{th} = \frac{\pi^2 EJ_x}{l^2} \quad (21-2)$$

Như vậy, phương trình của đường đàn hồi là một đường hình sin :

$$y(z) = C_1 \sin \alpha z \quad (7)$$

và hình biến dạng của dầm là một nửa bước sóng. Nếu lấy $k = 2, 3 \dots$ nghĩa là lực tới hạn sẽ tăng lên gấp 4, 9... lần, biến dạng của dầm lớn lên và nghiệm đó không còn đúng, vì lúc đó phương trình vi phân (2) không đúng. Nghiệm trở lại đúng nếu như ta đặt thêm các liên kết làm cho dầm có các biến dạng là hai nửa bước sóng, ba nửa bước sóng... như trên hình 21-5.

Xét một ví dụ thứ hai với thanh có liên kết là một đầu ngàm và một đầu gối tựa di động (h.21-6).



Hình 21-5

Giả sử tại B tháo bỏ liên kết đơn, thanh sẽ bị uốn cong như hình 21-6b. Như vậy muốn thanh có được biến dạng như hình 21-6a ta phải thêm một lực R tác dụng ngang đẩy đầu B lại vị trí ban đầu. Lực R chính là phản lực tại B do liên kết đơn gây nên.

Cũng vì vậy mômen uốn trên một mặt cắt ngang nào đó sẽ là :

$$M_x = Py - R(l - z) \quad (8)$$

Phương trình vi phân của đường đàn hồi là :

$$y'''' = \frac{-Py + R(l - z)}{EJ_x} \quad (9)$$

Hay có thể viết lại dưới dạng :

$$y'''' + \alpha^2 y = \frac{R}{EJ_x} (l - z) \quad (10)$$

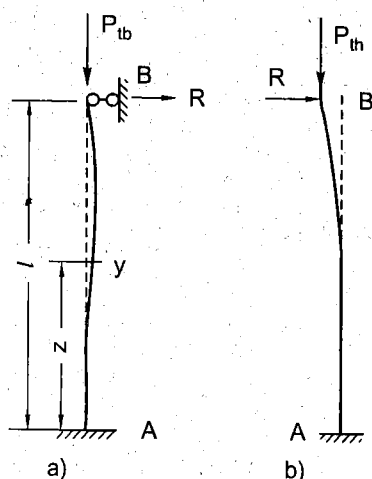
Nghiệm tổng quát của phương trình đó có dạng :

$$y = C_1 \sin \alpha z + C_2 \cos \alpha z + \frac{R}{EJ_x} (l - z) \quad (11)$$

Các hằng số tích phân C_1, C_2 và R được chọn sao cho phương trình thỏa mãn các điều kiện biên sau đây :

$$\text{với } z = 0, y = 0 \text{ và } y' = 0$$

$$\text{với } z = l, y = 0$$



Hình 21-6

Từ đó ta có hệ phương trình thuần nhất

$$\left. \begin{aligned} C^2 + \frac{Rl}{EJ_x \alpha^2} &= 0 \\ C_1 \alpha - \frac{R}{EJ_x \alpha^2} &= 0 \\ C_1 \sin \alpha l + C_2 \cos \alpha l &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Ta có hai khả năng :

1. Hệ phương trình cho nghiệm tầm thường $C_1 = C_2 = 0, R = 0$ khi đó $y \equiv 0$, dầm không có biến dạng. Trường hợp này ta không quan tâm đến.

2. Khi không phải là tất cả các hằng số C_1, C_2 và R là bằng không, khi đó dầm sẽ có độ võng ngang. Muốn có điều đó định thức của hệ phải bằng không.

Ta có :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{EJ_x \alpha^2} \\ \alpha & 0 & -\frac{1}{EJ_x \alpha^2} \\ \sin \alpha l & \cos \alpha l & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (13)$$

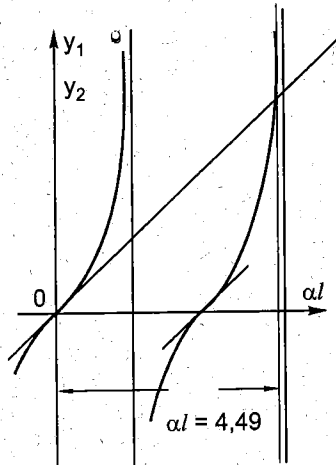
Vậy : $\tan \alpha l = \alpha l$

Giải phương trình đó bằng đồ thị. Vẽ trên đồ thị các hàm $y_1 = \tan \alpha l$ và $y_2 = \alpha l$ (h.21-7). Giao điểm của các đường biểu diễn, cho ta nghiệm của phương trình :

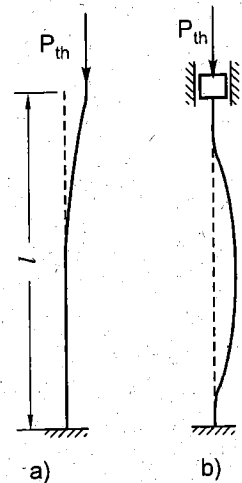
$$\alpha l = \sqrt{\frac{P_{th}}{EJ_x}} l = 4,49$$

Từ đó ta có :

$$P_{th} = \frac{4,49^2 EJ_x}{l^2} \approx \frac{\pi^2 EJ_x}{(0,7l)^2} \quad (21-3)$$



Hình 21-7



Hình 21-8

Bằng cách chứng minh tương tự với hai trường hợp trên có thể tìm được P_{th} cho các trường hợp thanh có hai liên kết khác. Nhưng ở đây ta có thể dựa vào số nửa bước sóng để suy ra lực tới hạn. Ta thấy trường hợp khi hai đầu là các gối tựa thì đường đàn hồi có dạng là một nửa bước sóng, vậy với thanh có một đầu ngàm (h.21-8a) nửa bước sóng có độ dài là $2l$ vậy :

$$P_{th} = \frac{\pi^2 EJ_x}{(2l)^2}$$

Với hình 21-8b nửa bước sóng có độ dài là $\frac{l}{2}$ vậy $P_{th} = \frac{\pi^2 EJ_x}{\left(\frac{l}{2}\right)^2}$ một cách tổng quát ta

có thể viết công thức của lực tới hạn như sau :

$$P_{th} = \pi^2 \frac{EJ_{min}}{(\mu l)^2} \quad (21-4)$$

μ là hệ số phụ thuộc vào liên kết của thanh, ví dụ với trường hợp đầu (h.21-3) $\mu = 1$;

Trường hợp (h.21-5a), $\mu = 1/2$; Trường hợp (h.21-5b), $\mu = 1/3$;

Trường hợp (h.21-6), $\mu = 0,7$, Trường hợp (h.21-8a), $\mu = 2$;

Trường hợp (h.21-8b), $\mu = 1/2$ v.v...

§21-3. ỨNG SUẤT TỚI HẠN VÀ GIỚI HẠN ÁP DỤNG CÔNG THỨC OLE

Ứng suất trong thanh khi P đạt đến P_{th} là :

$$\sigma_{th} = \frac{P_{th}}{F} = \pi^2 \frac{EJ_{min}}{(\mu l)^2 F}$$

hay

$$\sigma_{th} = \pi^2 \frac{E}{\lambda^2} \quad (21-5)$$

trong đó λ được gọi là độ mảnh của thanh. Trị số của λ là :

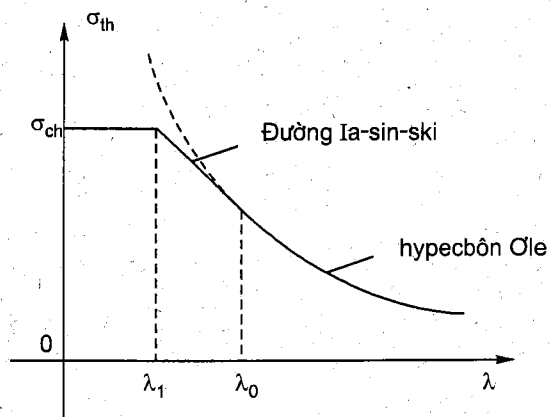
$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{min}} \quad (21-6)$$

i_{min} là bán kính quán tính cực tiểu của mặt cắt ngang. Với định nghĩa :

$$i_{min} = \sqrt{\frac{J_{min}}{F}}$$

Ta nhận thấy λ phụ thuộc vào hình dạng của mặt cắt ngang, độ dài của thanh và điều kiện liên kết của hai đầu. Ứng suất tới hạn σ_{th} là một hàm số hypecbôn đối với λ (h.21-9).

Đường hypecbôn đó được gọi là hypecbôn Ole. Ta không thể sử dụng toàn bộ đường hypecbôn đó vì với λ càng nhỏ thì ứng suất tới hạn càng lớn và vượt quá giới hạn đàn hồi.



Hình 21-9

Điều kiện áp dụng công thức Ole là khi σ_{th} còn nhỏ hơn giới hạn tỉ lệ của vật liệu :

$$\sigma_{th} \leq \sigma_{tl} \quad (14)$$

Từ đó ta có :

$$\frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{tl}$$

Hay :

$$\lambda \geq \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{tl}}} = \lambda_0$$

Nghĩa là đường hypecbôn Ode chỉ đúng khi $\lambda \geq \lambda_0$

Trị số λ_0 chỉ phụ thuộc vào vật liệu. Với thép số N^o3, $E = 2,1.10^7 \text{ N/cm}^2$ và $\sigma_{tl} = 21 \text{ kN/cm}^2$ thì $\lambda_0 \approx 100$.

Với các trị số $\lambda < \lambda_0$ thì đường đó không đúng nữa.

Khi đó vật liệu đã bước qua giới hạn tỉ lệ và đi vào miền dẻo. Cho đến nay ta chưa có một công trình nào chứng minh bằng lí thuyết để tính σ_{th} cho miền này, mà chỉ có các công trình kinh nghiệm. Một trong những công thức được áp dụng rộng rãi nhất là công thức của Iasinxki.

Iasinxki cho rằng : ứng suất tới hạn trong miền dẻo phụ thuộc vào λ theo đường thẳng như sau :

$$\sigma_{th} = a - b\lambda \quad (21-7)$$

a và b là các hằng số phụ thuộc vào tính chất của vật liệu. Các trị số đó được xác định bằng thí nghiệm. Đường Iasinxki được biểu diễn như trên hình 21-9. Nhưng đường Iasinxki cũng chỉ đúng với $\lambda \geq \lambda_1$, khi $\lambda \leq \lambda_1$ thì ta có $\sigma_{th} = \sigma_{ch}$ (giới hạn chảy). Đối với vật liệu giòn $\sigma_{th} = \sigma_B$.

Ta có thể dễ dàng xác định trị số λ_1 . Thực vậy $\lambda = \lambda_1$ thì ta phải có :

$$\sigma_{th} = a - b\lambda_1 = \sigma_{ch}$$

Do đó ta có :

$$\lambda_1 = \frac{a - \sigma_{ch}}{b} \quad (21-8)$$

Trị số của a và b có thể tra trong các sổ tay kĩ thuật, ví dụ với thép N^o3, $a = 336 \text{ MN/m}^2$ và $b = 1,47 \text{ MN/m}^2$; với gỗ, $a = 29,3 \text{ MN/m}^2$, $b = 0,194 \text{ MN/m}^2$.

§21-4. PHƯƠNG PHÁP THỰC HÀNH ĐỂ TÍNH THANH CHỊU NÉN

Để tránh sự phiền phức phải để ý đến các miền phân biệt trong việc tính σ_{th} người ta đã đề ra một phương pháp thực hành để tính ổn định của thanh chịu nén đúng tâm như sau :

Gọi ứng suất ổn định cho phép là trị số :

$$[\sigma]_{\text{od}} = \frac{\sigma_{th}}{n_{\text{od}}} \quad (21-9)$$

$n_{\text{đd}}$ là hệ số an toàn vì ổn định. Cũng như trước đây ta đã có ứng suất cho phép là trị số ;

$$[\sigma] = \frac{\sigma_0}{n} \quad (15)$$

σ_0 là ứng suất nguy hiểm. Với vật liệu dẻo ta lấy $\sigma_0 = \sigma_{\text{ch}}$, với vật liệu giòn ta có $\sigma_0 = \sigma_B$; n là hệ số an toàn về bền.

Thường $n_{\text{đd}}$ được chọn lớn hơn n .

Đem chia (21-9) cho (15) ta có :

$$\frac{[\sigma]_{\text{đd}}}{[\sigma]} = \frac{n}{n_{\text{đd}}} \cdot \frac{\sigma_{\text{th}}}{\sigma_0} = \varphi \quad (16)$$

Ta nhận thấy φ luôn luôn < 1 nên được gọi là hệ số giảm ứng suất. Để xác định được φ phải xác định được σ_{th} theo các miền khác nhau như đã làm ở trên, phải xác định được σ_0 theo vật liệu và phải định ra được n và $n_{\text{đd}}$. Như vậy φ là một hàm số đối với độ mảnh λ . Trị số của φ được lập thành bảng theo λ và theo vật liệu như trên bảng 21-1.

Bảng 21-1

Độ mảnh λ	Trị số φ đối với				
	Thép số N ^o , 4, 3, 2	Thép số N ^o 5	Thép CIHK	Gang	Gỗ
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	0,97	0,97	0,99
20	0,96	0,95	0,95	0,91	0,97
30	0,94	0,92	0,91	0,81	0,93
40	0,92	0,89	0,87	0,69	0,87
50	0,89	0,86	0,83	0,57	0,80
60	0,86	0,82	0,79	0,44	0,71
70	0,81	0,76	0,72	0,34	0,60
80	0,75	0,70	0,61	0,26	0,48
90	0,69	0,62	0,55	0,20	0,38
100	0,60	0,51	0,43	0,16	0,31
110	0,52	0,43	0,35	—	0,25
120	0,45	0,36	0,30	—	0,22
130	0,40	0,33	0,26	—	0,18
140	0,36	0,29	0,23	—	0,16
150	0,32	0,26	0,21	—	0,14
160	0,29	0,24	0,19	—	0,12
170	0,26	0,21	0,17	—	0,11
180	0,23	0,19	0,15	—	0,10
190	0,21	0,17	0,14	—	0,09
200	0,19	0,16	0,13	—	0,08

Từ (16) ta có :

$$[\sigma]_{\text{đđ}} = \varphi[\sigma] \quad (21-10)$$

Vậy điều kiện để thanh chịu nén vừa đủ bền và không mất ổn định là :

$$\frac{P}{F} \leq [\sigma]_{\text{đđ}} \quad (21-11)$$

Tuy nhiên nếu trong thanh, vì một lí do nào đó, có mặt cắt ngang bị giảm yếu cục bộ, ví dụ những lỗ khoét để bắt bulông hoặc đinh tán, thì sự giảm yếu đó chỉ ảnh hưởng đến độ bền còn ảnh hưởng không đáng kể đến tính ổn định của thanh đó. Vì thế ta phải kiểm tra cả điều kiện bền và điều kiện ổn định. Điều kiện bền phải lấy diện tích thực của mặt cắt bị yếu để tính ứng suất :

$$\sigma_z = \frac{P}{F_{\text{th}}} \leq [\sigma]$$

Ví dụ 1. Tính lực tới hạn và ứng suất tới hạn của một cột làm bằng thép N^o3, mặt cắt ngang hình chữ I số 22a. Cột có liên kết khớp tại hai đầu. Xét với hai trường hợp :

- a) Cột cao 3m
- b) Cột cao 2,25m

Cho biết $E = 2,1 \cdot 10^7 \text{ N/cm}^2$

Bài giải

Mặt cắt ngang hình chữ I số 22a có $F = 32,4 \text{ cm}^2$ và $i_{\min} = 2,5 \text{ cm}$.

- a) Khi cột cao 3m độ mảnh của cột sẽ là :

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{1,3}{0,025} = 120$$

Ở trên ta đã tính được, với thép số 3 có $\lambda_0 = 100$ nên ở đây $\lambda > \lambda_0$ do đó ta có thể sử dụng được công thức Olev.

Ứng suất tới hạn sẽ là :

$$\sigma_{\text{th}} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{9,86 \cdot 2,1 \cdot 10^7}{120^2} = 14,3 \text{ kN/cm}^2$$

Do đó lực tới hạn của thanh bằng :

$$P_{\text{th}} = \sigma_{\text{th}} F = 14,3 \cdot 32,4 = 463,32 \text{ kN}$$

- b) Khi cột cao 2,25m độ mảnh λ là :

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{1,2 \cdot 25}{0,025} = 90 < \lambda_0$$

Vì $\lambda < \lambda_0$ nên ta phải dùng công thức của Iasinxki để tính ứng suất tới hạn. Ta đã biết, thép số 3 có $a = 336 \text{ MN/m}^2$, $b = 1,47 \text{ MN/m}^2$ nên :

$$\sigma_{\text{th}} = a - b\lambda = 336 - 1,47 \cdot 90 = 20,4 \text{ kN/cm}^2$$

Vậy :

$$P_{th} = \sigma_{th} F = 20,4.32,4 = 660 \text{ kN}$$

Ví dụ 2. Cho một cột gỗ cao 7m, mặt cắt ngang hình chữ nhật $12 \times 22 \text{ cm}^2$. Trong mặt phẳng có độ cứng nhỏ nhất hai đầu bị ngàm chặt (h.21-10a) và trong mặt phẳng có độ cứng lớn nhất hai đầu liên kết khớp (h.21-10b). Xác định lực tới hạn. Cho biết $E = 9.10^5 \text{ N/cm}^2$.

Bài giải

Với mặt cắt hình chữ nhật ta có :

$$i_{\max} = \frac{h}{\sqrt{12}} = \frac{22}{\sqrt{12}} = 6,36 \text{ cm}$$

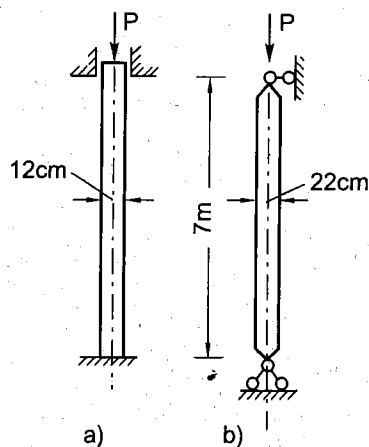
$$i_{\min} = \frac{b}{\sqrt{12}} = \frac{12}{\sqrt{12}} = 3,46 \text{ cm}$$

Trong mặt phẳng có độ cứng lớn nhất, độ mảnh của thanh bằng :

$$\lambda' = \frac{\mu l}{i_{\max}} = \frac{1.7}{6,36.10^{-2}} = 110$$

Trong mặt phẳng có độ cứng bé nhất, độ mảnh của thanh là :

$$\lambda'' = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{2.7}{3,46.10^{-2}} = 101$$



Hình 21-10

Ta thấy trong trường hợp này $\lambda' > \lambda''$ nên khi mất ổn định cột sẽ cong trong mặt phẳng có độ cứng lớn nhất. Ta sẽ dùng λ' để tính ứng suất tới hạn và lực tới hạn.

Ta đã biết gỗ có $\lambda_0 = 75$ vậy ta có thể dùng công thức Olev vì $\lambda' > \lambda_0$.

$$\sigma_{th} = \frac{\pi^2 E}{(\lambda')^2} = \frac{9,86.9.10^5}{110^2} = 733 \text{ N/cm}^2$$

Lực tới hạn của cột là :

$$P_{th} = \sigma_{th} F = 733.12.22 = 193,5 \text{ kN}$$

Ví dụ 3. Cho một cột cao 3m, hai đầu liên kết khớp, mặt cắt ngang hình chữ I số hiệu N^o30a. Cột làm bằng thép số 2 có $[\sigma]_n = 14,00 \text{ kN/cm}^2$. Xác định lực nén cho phép tác động trên đầu cột.

Bài giải

Mặt cắt ngang hình chữ I số hiệu 30a có $F = 49,9 \text{ cm}^2$, $i_{\min} = 2,95 \text{ cm}$. Hai đầu cột liên kết khớp nên hệ số $\mu = 1$. Ta tính độ mảnh λ .

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{1.300}{2,95} = 101$$

Tra bảng ta được trị số $\phi = 0,592$.

Lực nén cho phép là :

$$[P]_{\text{đd}} \leq 0,592 \cdot 14 \cdot 49,9 = 413 \text{ kN}$$

Ví dụ 4. Chọn số hiệu thép chữ I cho một thanh dài 2m, liên kết khớp tại hai đầu và chịu một lực nén $P = 230 \text{ kN}$. Biết vật liệu là thép số 2 có $[\sigma]_n = 14 \text{ kN/cm}^2$.

Bài giải

Ta phải giải bài toán theo phương pháp đúng dần.

a) *Chọn lần thứ nhất.* Cho $\varphi = 0,50$. Với trị số đó ta tính được diện tích mặt cắt ngang như sau :

$$F \geq \frac{P}{\varphi[\sigma]_n} = \frac{230 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 14 \cdot 10^3} = 32,8 \text{ cm}^2$$

Tra bảng ta thấy có loại thép chữ I số hiệu 22a có diện tích gần với số liệu trên đây : $F = 32,4 \text{ cm}^2$. Với số liệu này ta có $i_{\min} = 2,5 \text{ cm}$. Nếu chọn loại này ta có độ mảnh của thanh là :

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{1 \cdot 200}{2,5} = 80$$

Với $\lambda = 80$ tra bảng ta được $\varphi = 0,75$.

Hệ số này khác nhiều so với trị số giả thiết ban đầu như vậy ta cần chọn lại.

b) *Chọn lần thứ hai.* Ta có thể chọn hệ số φ như sau :

$$\varphi = \frac{0,5 + 0,75}{2} = 0,625$$

Từ đó ta có :

$$F \geq \frac{230 \cdot 10^3}{0,625 \cdot 14 \cdot 10^3} = 26,2 \text{ cm}^2$$

Tra bảng ta thấy có loại thép chữ I số 20. Diện tích mặt cắt ngang $F = 26,4 \text{ cm}^2$; $i_{\min} = 2,06 \text{ cm}$.

Độ mảnh của thanh sẽ là :

$$\lambda = \frac{1 \cdot 200}{2,06} = 97$$

Tra bảng ta được $\varphi = 0,627$, trị số này gần bằng trị số 0,625 ta đã giả thiết. Vậy ta chọn loại thép này.

Kiểm tra lại điều kiện ổn định :

$$\frac{P}{F} \leq \varphi[\sigma]_n = 8,77 \text{ kN/cm}^2$$

$$\frac{230 \cdot 10^3}{26,4} = 8,712 \text{ kN/cm}^2$$

Ta thấy đạt yêu cầu vậy chọn thép chữ I số 20.

§21-5. HÌNH DẠNG MẶT CẮT HỢP LÝ KHI CHỊU NÉN

Muốn cho thanh chịu nén đúng tâm được bảo đảm an toàn theo điều kiện bền thì chỉ cần mặt cắt ngang của thanh có một diện tích tối thiểu nào đó, còn hình dạng của nó, nói chung, có thể bất kỳ.

Nhưng muốn cho thanh ổn định thì không chỉ cần chú ý đến diện tích của mặt cắt ngang mà còn phải chú ý đến hình dạng của nó.

Phải chọn hình dạng của mặt cắt sao cho với một diện tích nhất định, thanh chịu được một lực nén lớn nhất. Hình dạng như vậy được gọi là hình dạng hợp lý. Hình dạng đó phải có các điều kiện sau đây :

a) $i_{\min} = i_{\max}$ tức là $J_{\min} = J_{\max}$ với liên kết hai mặt như nhau, nghĩa là khả năng chống lại sự mất ổn định theo các phương là như nhau. Muốn có được điều đó thì hình dạng của mặt cắt phải là hình tròn, hình vuông hoặc đa giác đều.

b) Các mômen quán tính chính trung tâm của mặt cắt ngang càng lớn càng tốt, vì thế người ta thường dùng các hình rỗng nhưng thành phải có chiều dày vừa đủ.

§21-6. ỔN ĐỊNH CỦA DẦM CHỊU UỐN NGANG PHẪNG

Nếu dầm chịu uốn có mặt cắt ngang là một hình chữ nhật hẹp (h.21-11a) thì khi mômen uốn đạt đến một trị số tới hạn nào đó dầm sẽ bị mất ổn định. Khi đó dầm không những bị uốn mà còn bị vênh (h.21-11b). Trên mặt cắt ngang của dầm có ba thành phần mômen : M_x ; M_y ; M_z .

Các thành phần đó được tính như sau :

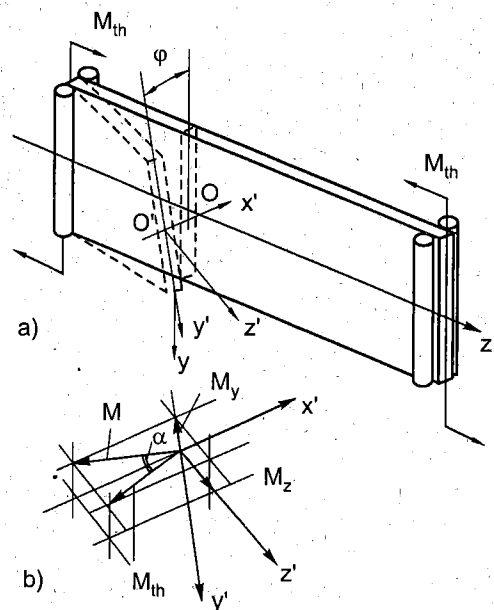
Vectơ mômen uốn tới hạn M_{th} luôn luôn vuông góc với mặt phẳng yOz (h.21-11a).

Khi dầm vừa bị uốn vừa bị vênh hệ trục $Oxyz$ xoay đi so với hệ trục cũ. Ta biểu diễn vị trí mới của hệ trục đó như trên hình 21-11b. Gọi hình chiếu của M_{th} trên mặt yOx là M_α . Góc tạo bởi M_α và M_{th} là góc xoay α của mặt cắt ngang xung quanh trục y .

Phương trình vi phân của độ võng theo phương ngang là :

$$x'' = - \frac{M_y}{EJ_y} \quad (17)$$

Góc xoay α có trị số gần bằng x' .



Hình 21-11

Trị số của M_α và M_z là :

$$\left. \begin{aligned} M_z &= M_{th} \sin \alpha \approx M_{th} \alpha \\ M_z &= M_{th} x' \\ M_\alpha &= M_{th} \cos \alpha \approx M_{th} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Phương của M_α và trục x là góc xoắn φ của mặt cắt. Do đó ta có :

$$\left. \begin{aligned} M_x &= M_\alpha \cos \varphi \\ M_y &= M_\alpha \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Vì φ bé nên sau khi thay M_α vào ta có :

$$\left. \begin{aligned} M_x &\approx M_{th} \\ M_y &\approx M_{th} \varphi \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Góc φ được xác định từ phương trình vi phân :

$$\varphi' = \frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_z}{GJ_d} \quad (21)$$

GJ_d là độ cứng khi xoắn của mặt cắt ngang :

Thay trị số M_z từ (18) vào ta có :

$$\varphi' = \frac{M_{th} x'}{GJ_d} \quad (22)$$

Lấy đạo hàm một lần nữa ta có :

$$\varphi'' = \frac{M_{th} x''}{GJ_d} \quad (23)$$

Thay x'' từ (17) vào (23) và với chú ý (20) ta có :

$$\varphi'' = -\frac{M_{th}^2}{EGJ_d J_y} \varphi \quad (24)$$

$$\text{Hay viết gọn lại :} \quad \varphi'' + k^2 \varphi = 0 \quad (25)$$

trong đó :

$$k^2 = \frac{M_{th}^2}{EGJ_d J_y} \quad (21-12)$$

Nghiệm tổng quát của phương trình (25) có dạng là :

$$\varphi = C_1 \sin kz + C_2 \cos kz \quad (26)$$

Các hằng số tích phân C_1 và C_2 được xác định từ các điều kiện biên. Các điều kiện đó là :

$$z = 0, \quad \varphi = 0 \quad (a)$$

$$z = 1, \quad \varphi = 0 \quad (b)$$

Từ điều kiện (a) tìm thấy $C_2 = 0$

Từ điều kiện (b) ta có : $C_1 \sinh l = 0$

(27)

Lập luận như trước đây ta đã làm :

C_1 phải khác không. Nghĩa là phải có :

$$\sinh l = 0 \text{ hay } kl = n\pi \quad (n = 1, 2, \dots, n)$$

Vậy :

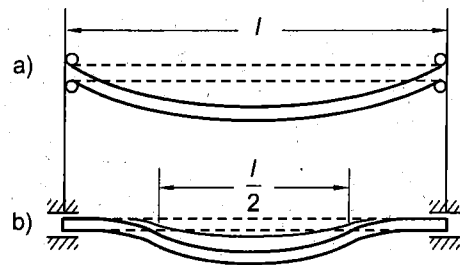
$$k^2 = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} = \frac{M_{th}^2}{EGJ_d J_y}$$

với $n = 1$ ta có mômen uốn tối hạn cho dầm có các gối tựa ở hai đầu là (h.21-12a).

$$M_{th} = \frac{\pi}{l} \sqrt{EGJ_d J_y} \quad (21-13)$$

Đối với dầm chịu ngàm chặt hai đầu (h.21-12b) cũng lí luận như trên ta tìm thấy mômen tối hạn như sau :

$$M_{th} = \frac{2\pi}{l} \sqrt{EGJ_x J_x} \quad (21-14)$$

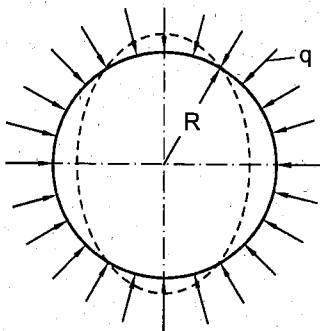


Hình 21-12

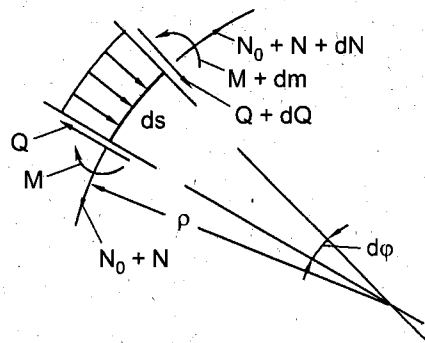
§21-7. ỔN ĐỊNH CỦA VÀNH CHỊU ÁP SUẤT BÊN NGOÀI

Xét sự ổn định của vành chịu áp lực phân bố đều bên ngoài cường độ q (h.21-13).

Khi áp lực q tăng lên đến một giá trị nhất định vành không giữ được hình dạng tròn ban đầu nữa mà sẽ méo mó đi theo một hình elip. Trạng thái đó là trạng thái mất ổn định của vành.



Hình 21-13



Hình 21-14

Xét một phần tử ds được tách ra bởi các mặt cắt vuông góc với trục. Khi vành mất ổn định, bán kính cong của phần tử bị thay đổi không còn là R nữa. Ta gọi bán kính cong mới này là ρ và gọi χ là độ thay đổi của độ cong :

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{R} = \chi \quad (28)$$

Khi vành chưa bị mất ổn định, trên mặt cắt ngang của vành chỉ có một thành phần lực dọc là :

$$N_o = qR \quad (29)$$

Khi vành bị mất ổn định trên mặt cắt có các thành phần nội lực (h.21-14). Các phương trình cân bằng được viết như sau :

$$\begin{cases} qds + dQ - (N_o + N) \frac{ds}{\rho} = 0 & (a) \\ \frac{Q}{R} + \frac{dN}{ds} = 0 & (b) \\ \frac{dM}{ds} + Q = 0 & (c) \end{cases}$$

Thay (29) vào phương trình (a) ta có :

$$q \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\rho} \right) + \frac{1}{R} \cdot \frac{dQ}{ds} - \frac{N}{\rho R} = 0$$

Từ (28) có thể viết lại :

$$-q\chi + \frac{1}{R} \cdot \frac{dQ}{ds} - \frac{N}{R^2} = 0 \quad (30)$$

Trong số hạng cuối cùng ta đã lấy trị số $\rho \approx R$.

Với các biểu thức (c) và (b) phương trình (30) có thể viết lại dưới dạng :

$$q\chi + \frac{1}{R} \cdot \frac{d^2 M}{ds^2} + \frac{1}{R^3} M = C_1 \quad (31)$$

Vế phải của (31) là hằng vì ta phải lấy tích phân phương trình (b)

Chú ý đến tương quan giữa mômen uốn và sự thay đổi độ cong χ ta có :

$$M = EJ \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{R} \right) = EJ\chi \quad (32)$$

Thay biểu thức đó vào (31), được phương trình vi phân :

$$\frac{d^2 \chi}{ds^2} + k^2 \chi = C_1 \frac{R}{EJ} \quad (33)$$

trong đó :

$$k^2 = \frac{1}{R^2} + \frac{qR}{EJ} \quad (21-15)$$

Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân đó có dạng :

$$\chi + \frac{C_1 R}{k^2 \cdot EJ} + C_2 \sin ks + C_3 \cos ks$$

χ phải là một hàm tuần hoàn vì trị số của χ phải như nhau khi có chiều dài là $2\pi R$. Điều đó có nghĩa là sự biến thiên của $k s$ với chiều dài $2\pi R$ phải là một số nguyên lần của 2π :

$$k(s + 2\pi R) - ks = 2\pi n$$

n là một số nguyên. Vậy ta có :

$$kR = n$$

Thay trị số đó vào (21-15) có q tới hạn là :

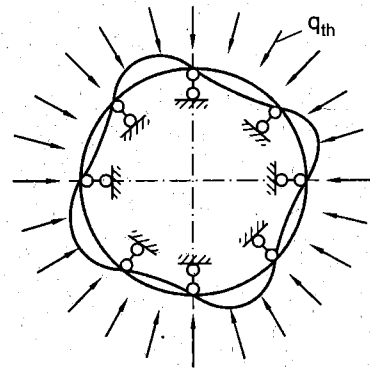
$$q_{th} = \frac{(n^2 - 1)EJ}{R^2} \quad (21-16)$$

Trị số nhỏ nhất của lực tới hạn là khi $n = 2$.

$$q_{th} = \frac{3EJ}{R^2} \quad (21-17)$$

Trong trường hợp đó χ thay đổi theo chu vi của vành hai chu kỳ nguyên vẹn (h.21-13). Vành bị uốn theo bốn nửa bước sóng và có hình dạng gần với hình dạng elip.

Nếu vành được gia cố bằng $2n$ ($n > 2$) liên kết đơn (h.21-15) phân bố đều theo chu vi của vành, sự mất ổn định sẽ tạo thành $2n$ nửa bước sóng và lúc đó áp lực tới hạn sẽ được tính với công thức tổng quát (21-16).



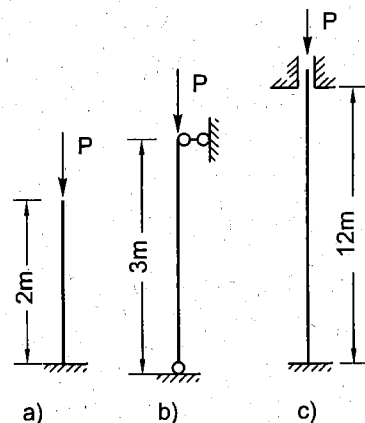
Hình 21-15

Bài tập

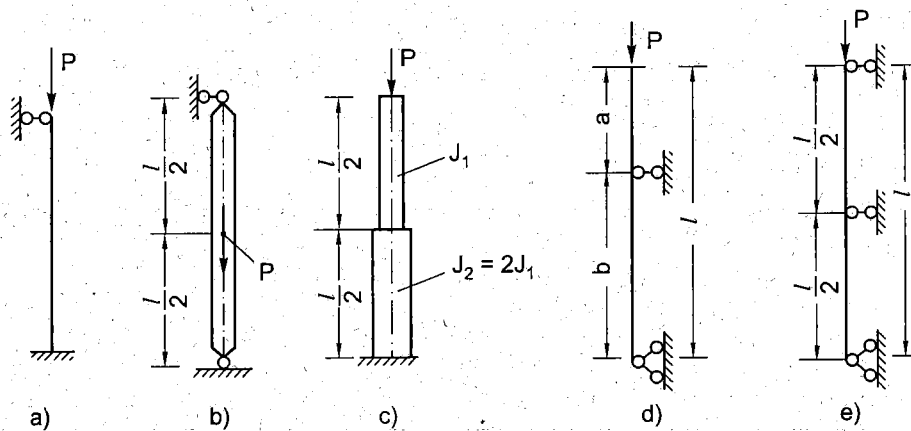
21.1. Xác định lực tới hạn và ứng suất tới hạn bằng công thức Olevski cho các thanh có :

- Mặt cắt hình chữ nhật 9×4 cm, chiều dài thanh $l_1 = 2$ m (h.21-16a)
- Mặt cắt hình chữ I số 16, chiều dài thanh $l_2 = 3$ m (h.21-16b)
- Mặt cắt hình chữ nhật rỗng có các cạnh ngoài 20×12 cm, bề dày vách bằng 2cm (h.21-16c).

21.2. Xác định lực tới hạn của các thanh cho trên hình 21-17a, b, c, d, e, bằng phương pháp Olevski.

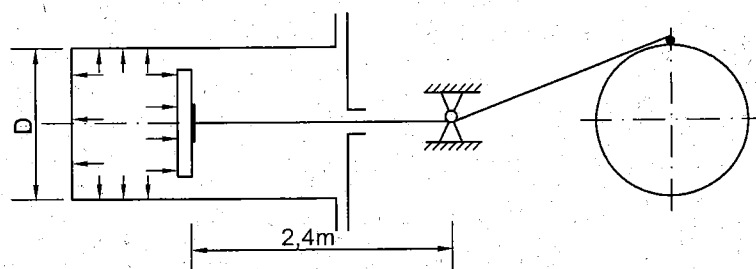


Hình 21-16



Hình 21-17

21.3. Cần trượt các pittông một máy hơi nước dài 2,4m có mặt cắt hình tròn đường kính $d = 7,5\text{cm}$ (h.21-18). Hãy kiểm tra điều kiện ổn định của cần. Cho biết áp suất trong xi lanh của máy $q = 0,8\text{MN/m}^2$. Đường kính D của pittông bằng 40cm, hệ số an toàn ổn định $K_{\text{od}} = 8$. Cần làm bằng thép CT_2 .



Hình 21-18

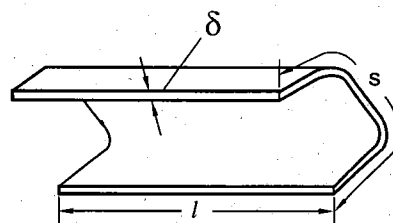
THANH THÀNH MỎNG

§22-1. KHÁI NIỆM

Ngày nay các kết cấu thanh thành mỏng được áp dụng rộng rãi trong nhiều ngành chế tạo máy và xây dựng, đặc biệt trong ngành chế tạo máy bay, tàu thủy, toa xe...

Trên hình 22-1 biểu diễn một thanh thành mỏng. Đặc trưng của thanh là chiều dày δ rất bé so với đường chu tuyến s của mặt cắt ngang và s lại rất bé so với chiều dài l của thanh.

Nhờ đặc tính có trọng lượng nhỏ và sức chịu lực lớn nên thanh được sử dụng để tạo thành khung của thân máy bay, ô tô, tàu thủy v.v...



Hình 22-1

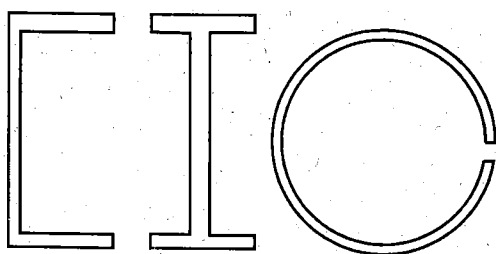
Timôscô là người đã đưa ra lí thuyết tính toán về thanh thành mỏng sau đó Volaxốp đã hoàn chỉnh và phát triển cả về lí thuyết độ bền, ổn định và dao động của thanh thành mỏng mặt cắt hở. Cũng vì vậy hiện nay người ta vẫn gọi là lí thuyết của Volaxốp.

Ta có các định nghĩa sau đây : mặt cách đều hai mặt bên của thanh được gọi là mặt trung gian. Giao tuyến của mặt trung gian với mặt cắt ngang gọi là đường trung gian. Hình dáng của đường trung gian tạo thành chu tuyến của mặt cắt ngang.

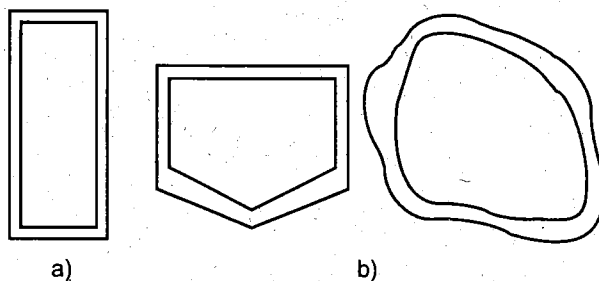
Trong thực tế thường gặp các loại thanh như sau :

a) Thanh mặt cắt hở. Chu tuyến là một đường hở.

Chu vi của mặt cắt ngang là một đường đơn liên (h.22-2).



Hình 22-2



Hình 22-3

b) Thanh mặt cắt kín. Chu tuyến là một đường thép kín.

Chu vi của mặt cắt ngang là một đường đa liên (h.22-3).

Căn cứ vào chiều dày ta cũng có thể phân biệt hai loại : thanh có chiều dày không đổi (h.22-3a) và thanh có chiều dày thay đổi (h.22-3b).

§22-2. ĐẶC TRƯNG QUẠT CỦA MẶT CẮT NGANG CỦA THANH THÀNH MỎNG HỎ

1. Tọa độ quạt

Giả sử cho đường trung gian của mặt cắt ngang như trên hình 22-4. Chọn một điểm O trên đường đó làm gốc tọa độ và một điểm P bất kỳ trên mặt phẳng cắt ngang làm cực. Gọi s là tọa độ của một điểm A nào đó trên đường trung gian. Xét phân tố AB với chiều dài ds.

Hai lần diện tích tam giác cong PAB có trị số là :

$$d\omega = rds$$

r là khoảng cách từ P đến đường tiếp tuyến qua A.

Tích phân :

$$\omega = \int_s rds = \int_0^s rds \text{ (cm}^2\text{)} \quad (22-1)$$

được gọi là tọa độ quạt của A.

Như vậy tọa độ quạt, về trị số, là bằng hai lần diện tích quạt của tia PA đã quét trong mặt phẳng của mặt cắt khi A chạy trên đường cong từ O đến điểm đang xét. Dấu của tọa độ được xem là dương khi tia PA quay quanh P theo chiều kim đồng hồ và là âm khi có chiều ngược lại.

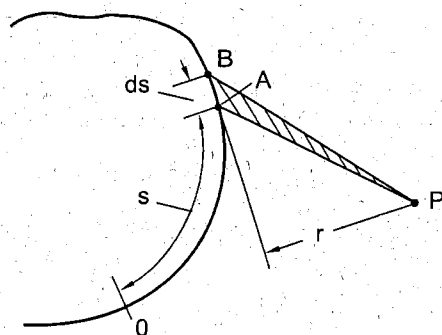
Tọa độ quạt phụ thuộc vào vị trí của cực P và điểm gốc O đã chọn.

Ta có thể tiến hành vẽ các biểu đồ tọa độ quạt như sau. Ví dụ cho một đường trung gian của mặt cắt ngang và chọn O, P như trên hình (22-5).

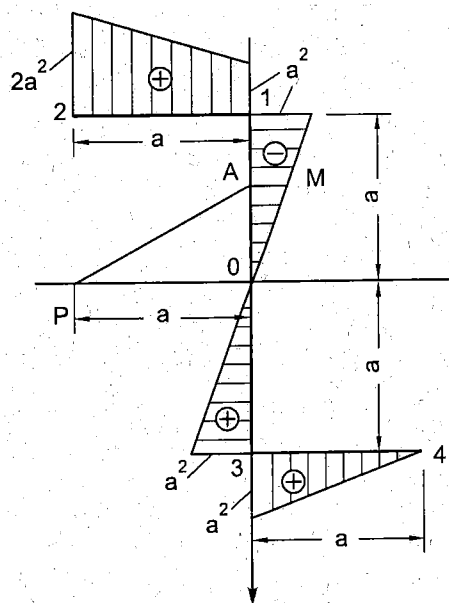
Tọa độ quạt tại A là hai lần diện tích tam giác POA.

$$\omega_A = -PO.OA = -as$$

Tọa độ đó mang dấu âm vì khi A chạy từ O đến A, tia PA quay quanh P theo chiều ngược chiều kim đồng hồ. Tại A, trên đường thẳng vuông góc với đường trung gian, theo tỉ lệ xích nhất định, ta lấy một đoạn AM biểu diễn cho trị số ω_A . Khi A chạy trên chu tuyến,



Hình 22-4



Hình 22-5

M sẽ vẽ nên biểu đồ tọa độ quạt của mặt cắt ngang (h.22-5). Ta dễ dàng tính được các tọa độ quạt của các điểm 1, 2, 3, 4 như sau :

$$\omega_1 = -a^2; \omega_2 = -2a^2; \omega_3 = a^2; \omega_4 = 0$$

Ví dụ 1. Vẽ biểu đồ tọa độ quạt của đường trung gian mặt cắt ngang được biểu diễn trên hình 22-6. P và O được chọn như hình vẽ :

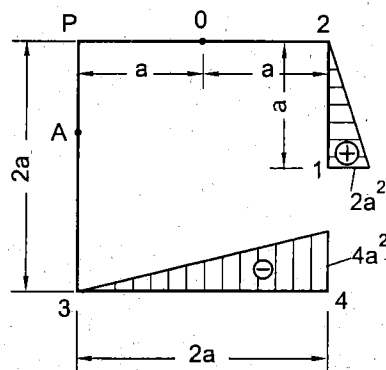
Bài giải

Ta nhận thấy, khi A chạy trên đường PO2 hay P3 tia PA không quay quanh O vậy tọa độ quạt của các điểm P2 và P3 là bằng không.

Tọa độ quạt tại các điểm 1, 2, 3, 4 như sau :

$$\omega_1 = 2a^2; \omega_2 = 0; \omega_3 = 0; \omega_4 = -4a^2$$

Biểu đồ được biểu diễn như trên hình 22-6.



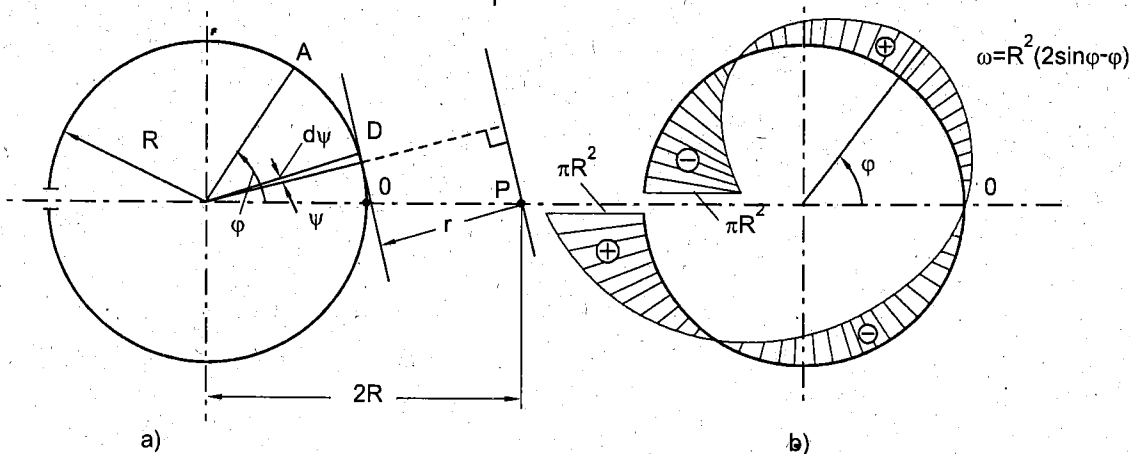
Hình 22-6

Ví dụ 2. Vẽ biểu đồ tọa độ quạt cho đường chu tuyến tròn hở với vị trí cực và gốc được chọn như trên hình 22-7a.

Bài giải

Gọi ψ là góc ở tâm xác định bởi cung $s = OD$. Khoảng cách từ P xuống đường tiếp tuyến qua D sẽ là :

$$r = 2R\cos\psi - R \quad (a)$$



Hình 22-7

Tọa độ quạt tại A là diện tích quạt do tia PD quét khi D chạy từ O đến A :

$$\omega_A = \int_s r ds = R^2 \int_0^\varphi (2\cos\psi - 1) d\psi$$

vậy :

$$\omega_A = R^2(2\sin\varphi - \varphi) \quad (b)$$

Căn cứ vào (b) ta được biểu đồ quạt như trên hình 22-7b.

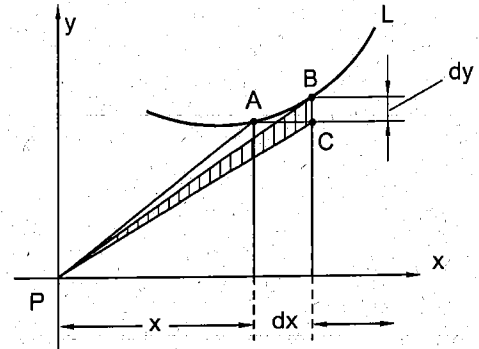
2. Tính tọa độ quạt theo hệ trục tọa độ vuông góc

Giả sử có một đường cong L biểu diễn một đoạn đường trung gian của mặt cắt ngang. Chọn một cực P và hệ trục Px, Py nằm trong mặt phẳng của mặt cắt (h.22-8). Nếu bỏ qua vô cùng bé bậc cao thì vi phân diện tích $d\omega$ là bằng hai lần hiệu của hai tam giác PAC và PBC , ta có

$$d\omega = ydx - xdy \quad (22-2)$$

trong đó x, y là tọa độ của A và $(x + dx), (y + dy)$ là tọa độ của B .

Ta dễ dàng thiết lập tương quan giữa các tọa độ quạt đối với hai cực bất kì.



Hình 22-8

Trong mặt phẳng của L lấy hai cực P_1, P_2 và hai hệ trục tọa độ $P_1x_1y_1, P_2x_2y_2$ có các trục song song và vuông góc với nhau (h.22-9). Tọa độ P_2 trong $P_1x_1y_1$ là a, b .

Giả sử đã xác định được tọa độ quạt trên cung $OI = s$ tương ứng với cực P_1 : Đòi hỏi xác định tọa độ quạt của đoạn cong đó đối với P_2 .

Ta có :

$$d\omega_2 = y_2dx_2 - x_2dy_2$$

Với tương quan giữa x_1y_1 và x_2y_2 là :

$$x_2 = x_1 - a$$

$$y_2 = y_1 - b$$

ta có thể biểu diễn $d\omega_2$ theo x_1y_1 như sau :

$$d\omega_2 = (y_1 - b)dx_1 - (x_1 - a)dy_1$$

Lấy tích phân hai vế dọc theo O_s ta có :

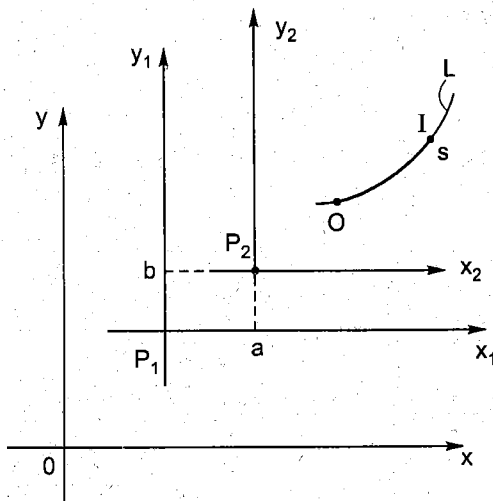
$$\omega_2(s) = \omega_1(s) - b(x_1 - x_{o1}) + a(y_1 - y_{o1})$$

trong đó x_1 và y_1 là tọa độ của I và x_{o1}, y_{o1} là tọa độ của gốc O trong hệ trục $P_1x_1y_1$.

Nếu O và I được xác định trong một hệ trục tọa độ bất kì Oxy song song với các trục $P_1x_1y_1$ và $P_2x_2y_2$ thì có thể viết ω_2 dưới dạng :

$$\omega_2(s) = \omega_1(s) - b(x - x_o) + a(y - y_o) \quad (22-3)$$

trong đó $\omega_2(s)$ và $\omega_1(s)$ là tọa độ quạt của I tương ứng với các cực P_2, P_1 ; x, y và x_o, y_o là tọa độ của O và I trong hệ trục Oxy , a, b vẫn là các khoảng cách giữa x_1x_2 và y_1y_2 .



Hình 22-9

Từ biểu thức (22-3) cho nhận xét sau đây : khi thay đổi cực P, nghĩa là a và b thay đổi, tọa độ quạt thay đổi một trị số tỉ lệ bậc nhất đối với các tọa độ x, y. Khi thay đổi gốc O trên cung, nghĩa là thay đổi x_0 và y_0 , tọa độ quạt thay đổi một hằng số.

3. Các đặc trưng quạt và cách xác định chúng

Ta có các định nghĩa sau đây :

Gọi mômen tĩnh quạt là biểu thức tích phân :

$$S_{\omega} = \int_F \omega dF \quad (\text{cm}^4) \quad (22-4)$$

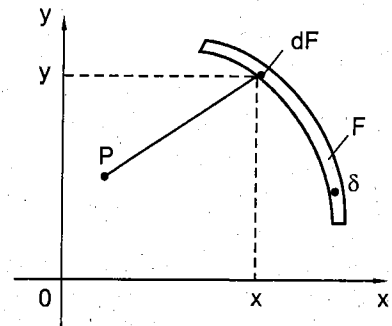
Gọi mômen quán đường là các biểu thức tích phân :

$$\left. \begin{aligned} J_{\omega x} &= \int_F \omega y dF (\text{cm}^5) \\ J_{\omega y} &= \int_F \omega x dF (\text{cm}^5) \end{aligned} \right\} \quad (22-5)$$

Gọi mômen quán tính quạt là biểu thức tích phân :

$$J_{\omega} = \int_F \omega^2 dF \quad (\text{cm}^5) \quad (22-6)$$

trong đó F là diện tích của mặt cắt ngang, x và y là tọa độ của dF và ω là tọa độ quạt tương ứng của điểm đó đối với cực P đã chọn (h.22-10).



Hình 22-10

Nếu chiều dày δ của thành là không đổi, các biểu thức tích phân trên sẽ có dạng như sau :

$$\begin{aligned} S_{\omega} &= \delta \int_S \omega ds ; & J_{\omega x} &= \delta \int_S \omega y ds ; \\ J_{\omega y} &= \delta \int_S \omega x ds ; & J_{\omega} &= \delta \int_S \omega^2 ds ; \end{aligned}$$

Ta nhận thấy nếu biểu đồ tọa độ quạt ω đã được xác định thì các biểu thức tích phân trên đây được tính dễ dàng.

Đối với các chu tuyến là những đoạn thẳng thì ta có thể sử dụng phương pháp nhân biểu đồ của Veresaghin để tính các tích phân.

Ví dụ 3. Xác định các đặc trưng quạt cho chu tuyến tròn (h.22-7a).

Bài giải

Trong ví dụ 2 chúng ta đã tính được tọa độ quạt tại một điểm A bất kì trên chu tuyến là :

$$\omega_A = R^2(2\sin\varphi - \varphi)$$

Ta có thể dễ dàng xác định : $dF = R\delta d\varphi$, $x = R\cos\varphi$ và $y = R\sin\varphi$.

Vậy các đặc trưng quạt được tính như sau :

$$S_{\omega} = \int_F \omega dF = R^3\delta \int_{-\pi}^{\pi} (2\sin\varphi - \varphi)d\varphi = 0$$

$$J_{\omega y} = \int_F x\omega dF = R^4\delta \int_{-\pi}^{\pi} \cos\varphi(2\sin\varphi - \varphi)d\varphi = 0$$

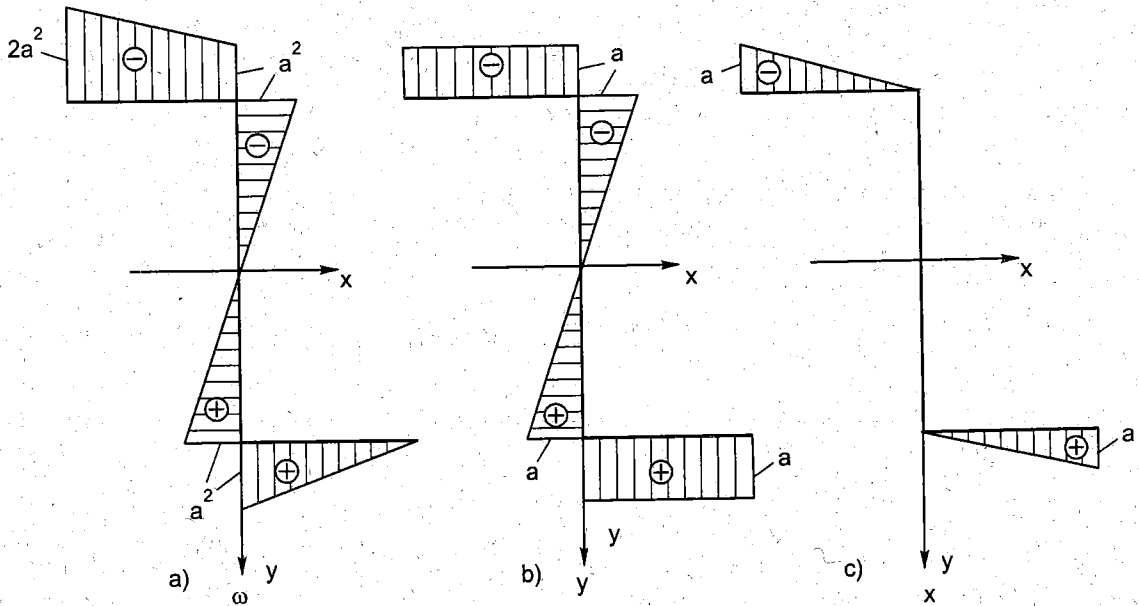
$$J_{\omega x} = \int_F y \omega dF = R^4 \delta \int_{-\pi}^{\pi} \sin \varphi (2 \sin \varphi - \varphi) d\varphi = 0$$

$$J_{\omega} = \int_F \omega^2 dF = R^5 \delta \int_{-\pi}^{\pi} (2 \sin \varphi - \varphi)^2 d\varphi = 2\pi \left(\frac{\pi^2}{3} - 2 \right) R^5 \delta$$

Ví dụ 4. Ta lấy lại ví dụ trên hình 22-5. Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ. Tính các đặc trưng quạt.

Bài giải

Biểu đồ tọa độ quạt tương ứng với P và O đã được xác định. Để tính được các đặc trưng quạt ta vẽ thêm các biểu đồ của y và x (h. 22-11b, c).



Hình 22-11

Các đặc trưng quạt được tính lần lượt như sau :

$$S_{\omega} = \int_F \omega dF = \delta \int_s \omega ds = -\delta \frac{a^3}{2}$$

$$J_{\omega x} = \int_F \omega y dF = \frac{8}{3} \delta a^4$$

$$J_{\omega y} = \int_F \omega x dF = \delta a^4$$

$$J_{\omega} = \int_F \omega^2 dF = \frac{7}{3} \delta a^5$$

Các kết quả trên thu được nhờ phép nhân theo phương pháp Vêrêsgahin giữa các biểu đồ tọa độ ω , y và x .

Ta có một số định nghĩa sau đây :

Nếu $J_{\omega y} = J_{\omega x} = 0$ thì cực P tương ứng được gọi là cực chính.

Nếu $S_{\omega} = 0$ thì gốc tương ứng được gọi là gốc chính.

Biểu đồ tọa độ quạt tương ứng với cực và gốc chính được gọi là biểu đồ tọa độ quạt chính. Mômen quán tính quạt tương ứng với biểu đồ đó được gọi là mômen quán tính quạt chính. Trong trường hợp ví dụ 3 : P và O là các điểm cực và gốc chính và trị số J_{ω} đã tính được là mômen quán tính quạt chính.

Cách xác định cực và gốc chính được tiến hành như sau :

Giả sử cho một chu tuyến của mặt cắt ngang như hình 22-12. Xem hệ trục Oxy là hệ trục quán tính chính trung tâm của mặt cắt. Chọn một cực P_1 bất kì. Với P_1 ta tính được ω_1 và các đặc trưng khác đối với hệ trục tọa độ $P_1x_1y_1$.

Gọi P_2 là cực chính phải tìm. Theo định nghĩa :

$$J_{\omega_2 y} = \int_F \omega_2 x dF = 0$$

$$J_{\omega_2 x} = \int_F \omega_2 y dF = 0$$

Theo (22-3) ta có :

$$J_{\omega_2 y} = \int_F [\omega_1 - b(x - x_0) + a(y - y_0)] x dF = 0$$

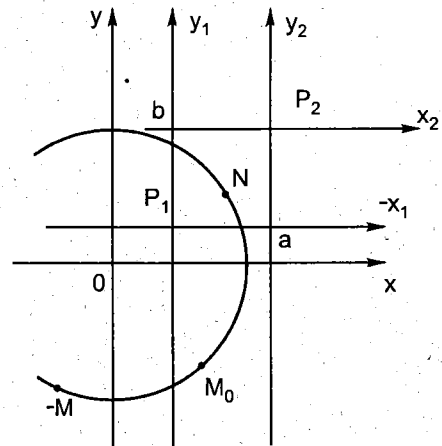
$$J_{\omega_2 x} = \int_F [\omega_1 - b(x - x_0) + a(y - y_0)] y dF = 0$$

trong đó a và b là tọa độ của P_2 trong hệ tọa độ $P_1x_1y_1$. Nếu gọi x_2, y_2 và x_1, y_1 là tọa độ của P_2 và P_1 trong hệ trục Oxy thì trị số của a và b là hiệu của các tọa độ x_2, x_1 và y_2, y_1 . Với chú ý Oxy là hệ trục quán tính chính trung tâm từ các biểu thức trên ta tìm thấy :

$$\left. \begin{aligned} a &= x_2 - x_1 = -\frac{J_{\omega_1 x}}{J_x} \\ b &= y_2 - y_1 = \frac{J_{\omega_1 y}}{J_y} \end{aligned} \right\} \quad (22-7)$$

Đó là công thức xác định tọa độ của P_2 từ vị trí của P_1 được chọn bất kì. Điểm gốc chính được xác định từ điều kiện :

$$S_{\omega} = 0$$



Hình 22-12

Giả sử lúc đầu ta chọn M, một điểm bất kì trên chu tuyến làm gốc. Tọa độ quạt của N đối với M được kí hiệu là $\omega_{\frac{N}{M}}$. Nếu chọn một điểm M_0 khác làm gốc ta sẽ được tương quan sau (h.22-12) :

$$\omega_{\frac{N}{M}} = \omega_{\frac{N}{M_0}} + \omega_{\frac{M_0}{M}}$$

Vậy

$$\omega_{\frac{N}{M_0}} = \omega_{\frac{N}{M}} - \omega_{\frac{M_0}{M}}$$

Xem M_0 là điểm gốc chính, theo định nghĩa ta phải có :

$$S_{\omega_{N/M_0}} = \int_F \omega_{\frac{N}{M_0}} dF = 0$$

hay :

$$S_{\omega_{N/M_0}} = \int_F \left(\omega_{\frac{N}{M}} - \omega_{\frac{M_0}{M}} \right) dF = 0$$

Do đó :

$$\int_F \omega_{\frac{N}{M}} dF - \omega_{\frac{M_0}{M}} \int_F dF = 0$$

Vậy

$$\omega_{\frac{M_0}{M}} = \frac{\int_F \omega_{\frac{N}{M}} dF}{F}$$

Công thức (22-7) cho phép ta xác định được tọa độ quạt của điểm M_0 từ gốc M bất kì ta chọn ban đầu.

Ví dụ 5. Xác định điểm cực chính và điểm gốc chính của chu tuyến hình chữ nhật (h.22-13). Chiều dày δ là không đổi.

Bài giải

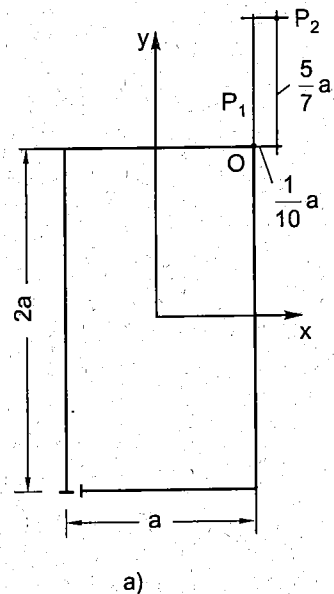
Trước hết phải xác định hệ trục tọa độ quán tính chính trung tâm Oxy của mặt cắt ngang (h.22-13a). Ta dễ dàng tính được :

$$J_x = \frac{10}{3} a^3 \delta \quad J_y = \frac{7}{6} a^3 \delta$$

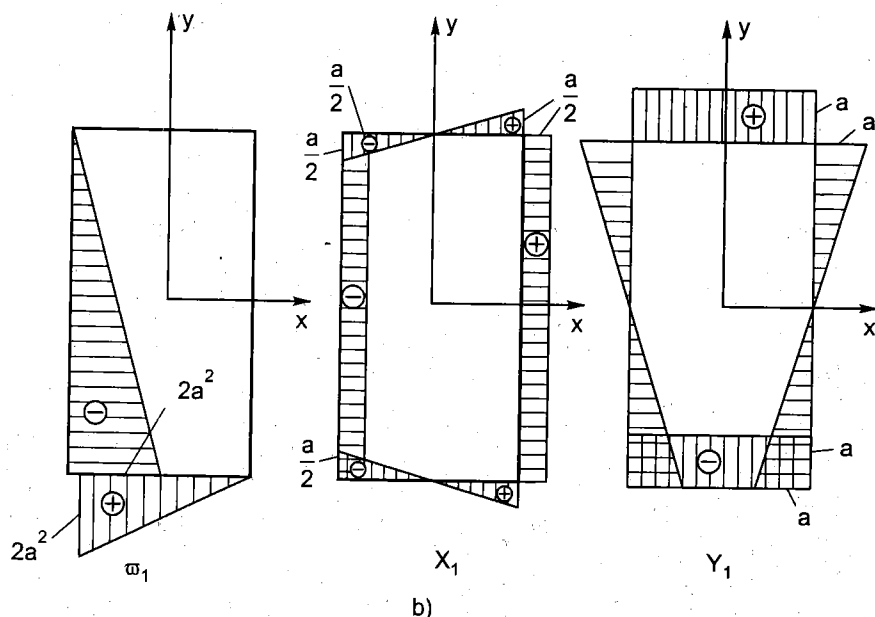
Để đơn giản, chọn cực P_1 ban đầu là ở góc trên của đường trung gian. Từ đó ta có biểu đồ tọa độ quạt ω_1 . Để tính các mômen quạt, vẽ các biểu đồ của x, y và sử dụng phép nhân biểu đồ của Verésaghin. Sau các phép toán ta được :

$$\int_F x \omega_1 dF = \frac{5}{6} a^4 \delta$$

$$\int_F y \omega_1 dF = -\frac{1}{3} a^4 \delta$$



Hình 22-13a



Hình 22-13b

Vị trí P_2 được xác định từ công thức (22-7) :

$$x_2 = \frac{1}{10}a + x_1$$

$$y_2 = \frac{5}{7}a + y_1$$

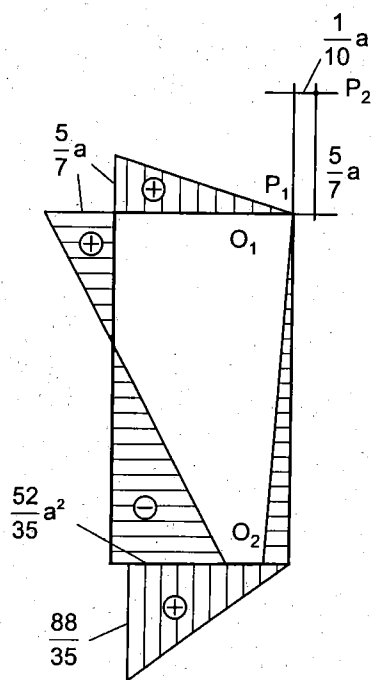
Với cực P_2 và với gốc O ta vẽ được biểu đồ quạt như trên hình 22-14. Mômen tĩnh quạt đối với O là :

$$\int_F \omega_N \frac{dF}{o} = \frac{38}{70}a^3\delta$$

Từ công thức (22-7), ta xác định được tọa độ quạt của điểm gốc chính :

$$\omega^* = \frac{\int_F \omega_N \frac{dF}{o}}{F} = \frac{\frac{38}{70}a^3\delta}{6a\delta} = 0,09a^2$$

Ta nhận thấy có hai điểm O_1 và O_2 có tọa độ là $0,09a^2$. Điểm gần với P_2 sẽ là điểm gốc chính (h.22-14).



Hình 22-14

§22-3. ỨNG SUẤT TIẾP TRONG THANH THÀNH MỎNG KHI CHỊU UỐN NGANG

Khi chịu uốn ngang trên mặt cắt ngang của thanh có hai thành phần nội lực : mômen uốn M_x và lực cắt Q_y .

Một cách gần đúng ứng suất pháp σ_z được tính với biểu thức :

$$\sigma_z = \frac{M_x}{J_x} y \quad (22-8)$$

Cách lập luận như đã được thực hiện đối với mặt cắt hình chữ nhật hẹp ta tìm thấy hệ ứng suất tiếp do lực cắt Q_y gây nên có phương song song với các tiếp tuyến trên biên của mặt cắt (h.22-15).

Trị số của ứng suất tiếp đó được tính với công thức của Giurapxki :

$$\tau = \frac{Q_y S_x^*}{J_x \delta} \quad (22-9)$$

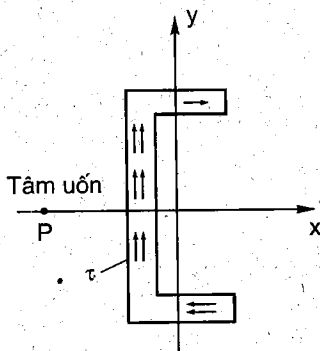
S_x^* là mômen tĩnh của diện tích F cắt (h.22-15) đối với hệ trục quán tính chính trung tâm Oxy. δ là độ dày của thành.

Ở đây ta xem τ phân bố đều ở trên δ .

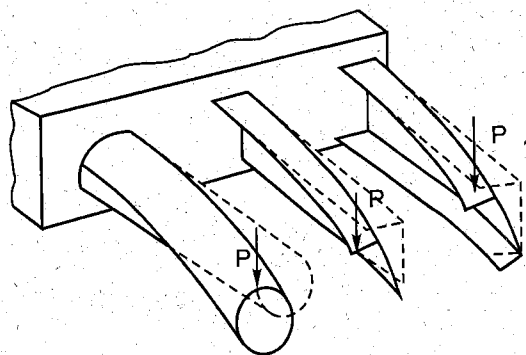
Một cách tổng quát khi trên mặt cắt ngang có hai thành phần lực cắt Q_x và Q_y thì ứng suất tiếp τ có trị số là :

$$\tau = \frac{Q_y S_x^*}{J_x \delta} + \frac{Q_x S_y^*}{J_y \delta} \quad (22-10)$$

Ta để ý đến một tính chất đặc biệt sau đây của hệ ứng suất đó : τ lập thành luồng trên mặt cắt, vì vậy ta gọi ứng suất tiếp này là ứng suất tiếp luồng. Hợp lực của τ có hình chiếu trên các phương x và y là các lực cắt Q_x , Q_y và nói chung khi thu gọn hợp lực đó về trọng tâm mặt cắt ta có thêm một mômen xoắn (h.22-16). Dĩ nhiên, trên mặt phẳng của mặt cắt ngang, ta luôn luôn tìm thấy một điểm P mà tại đó sự thu gọn hệ lực do τ gây nên chỉ còn một vectơ chính. Điểm đó được gọi là tâm uốn. Ngoại lực phải đặt đúng ở vị trí này thì thanh mới không bị xoắn. Nếu ngoại lực đặt không đúng ở vị trí này thì thanh vừa bị uốn vừa bị vênh vì xoắn (h.22-17).



Hình 22-16



Hình 22-17

Cách xác định tâm uốn như sau :

Trước hết hãy tính mômen của nội lực do τ gây nên đối với một điểm P bất kì nào đó trên mặt cắt (h. 22-15).

$$M_P = \int_F \tau \delta r ds$$

Trong đó r là khoảng cách từ P đến phương của τ và ds là một độ dài vô cùng bé của đường chu tuyến. Ta nhận thấy tích rds là vi phân tọa độ quạt của đường chu tuyến đối với cực P. Thay trị số của τ được tính từ (22-10) vào biểu thức của M_P :

$$M_P = \frac{Q_y}{J_x} \int_F S_x^* \frac{d\omega}{dF} dF + \frac{Q_x}{J_y} \int_F S_y^* \frac{d\omega}{dF} dF$$

Hai biểu thức tích phân có dạng tương tự. Ta tính trước một số hạng, ví dụ với số hạng thứ nhất.

Dùng tích phân đoạn có thể viết :

$$\int_F S_x^* \frac{d\omega}{dF} dF = S_x^* \omega \Big|_{S_1}^{S_2} - \int_F \frac{dS_x^*}{dF} \omega dF$$

trong đó S_1 và S_2 chỉ trị số của $S_x^* \omega$ tại vị trí 1 và 2 (h.22-15). Ta nhận thấy tại vị trí 1, $S^* = 0$ vì diện tích $F_{\text{cắt}} = 0$; tại vị trí 2, $S_x^* = S_x = 0$ vì hệ trục Oxy là hệ trục trung tâm.

Do đó :

$$\int_F S_x^* \frac{d\omega}{dF} dF = - \int_F \frac{dS_x^*}{dF} \omega dF$$

trong đó :

$$\frac{dS_x^*}{dF} = y$$

nên biểu thức tích phân đó là mômen quạt đường của diện tích F đối với trục x

$$\int_F \frac{dS_x^*}{dF} \omega dF = \int_F y \omega dF = J_{\omega x}$$

Vậy mômen của ứng lực do τ gây nên đối với P là :

$$M_P = - \left(\frac{Q_y}{J_x} J_{\omega x} + \frac{Q_x}{J_y} J_{\omega y} \right)$$

Muốn M_P triệt tiêu với mọi giá trị của Q_x, Q_y thì :

$$J_{\omega x} = J_{\omega y} = 0 \quad (22-11)$$

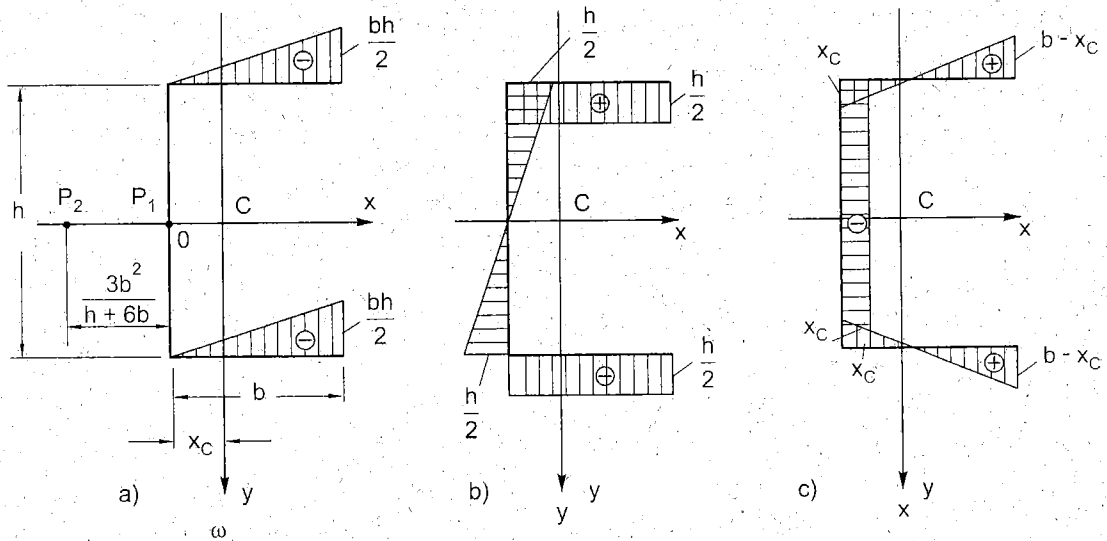
Nghĩa là P phải là điểm cực chính. Nói một cách khác tâm uốn trùng với cực chính của mặt cắt. Ví dụ với mặt cắt là đường tròn hở (h.22-7) điểm P là tâm uốn của mặt cắt. Với chu tuyến chữ nhật hở trên h.22-13 là điểm P_2 .

Ví dụ 6. Xác định tâm uốn của mặt cắt ngang có hình dáng chữ $\square$ như trên hình vẽ 22–18. Chiều dày σ xem như không đổi.

Bài giải

Hệ trục Cxy là hệ trục quán tính chính trung tâm của mặt cắt. Chọn cực P_1 và gốc O ban đầu như hình 22–18a. Biểu đồ tọa độ quạt ω_1 tương ứng với P cũng được biểu diễn trên hình đó. Biểu đồ các tọa độ x và y được vẽ trên hình 22–18b, c.

Vì biểu đồ tọa độ x là đối xứng và ω_1 là phản đối xứng nên chắc chắn :



Hình 22–18

$$J_{\omega_1 y} = \int_F \omega_1 x dF = 0$$

$J_{\omega_1 x}$ được xác định với biểu thức :

$$J_{\omega_1 x} = 2 \frac{bh}{2} b \cdot \frac{1h}{22} \delta = b^2 h^2 \delta / 4$$

Mômen quán tính của mặt cắt ngang đối với trục x là :

$$J_x = \frac{\left(b + \frac{\delta}{2}\right)(h + \delta)^3}{12} - \frac{\left(b - \frac{\delta}{2}\right)(h - \delta)^3}{12}$$

$$J_x \approx \frac{\delta h^2 (h + 6b)}{12}$$

Từ công thức (22–7) ta tìm thấy tọa độ của cực chính là :

$$a = -\frac{J_{\omega_1 x}}{J_x} = -\frac{3b^2}{h + 6b}$$

$$b = 0$$

Nghĩa là P_2 nằm trên trục x về phía âm và cách P_1 một khoảng cách là $\frac{3b^2}{h+6b}$.

Ta cũng có thể suy luận một cách khác :

Xác định mômen nội lực đối với P_1 :

$$M_{P_1} = 2 \frac{h}{2} \int_0^b \tau \delta ds = Q \frac{3b^2}{h+6b}$$

Tìm điểm P_2 mà tổng mômen của nội lực đối với mỗi điểm đó bằng không.

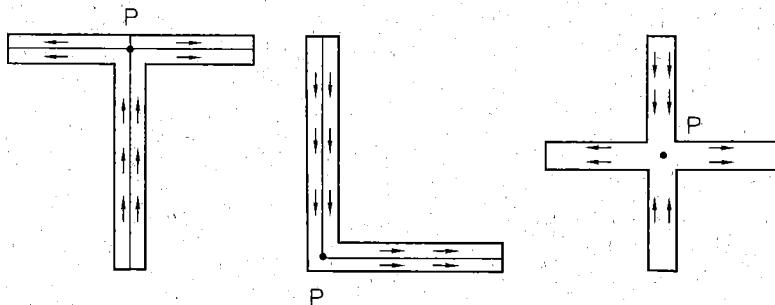
$$Q \overline{P_1 P_2} + Q \frac{3b^2}{h+6b} = 0$$

Từ đó :

$$\overline{P_1 P_2} = -\frac{3b^2}{h+6b}$$

như vậy ta có cùng một kết quả.

Đối với các mặt cắt có hai trục đối xứng thì tâm uốn sẽ trùng với trọng tâm mặt cắt. Đối với các mặt cắt hình chữ L, chữ T tâm uốn là giao điểm của các cánh vì tại đó mômen của tất cả các nội lực là bằng không (h.22-19).



Hình 22-19

§22-4. XOẮN THANH THÀNH MỎNG

Cách phân bố ứng suất tiếp trên mặt cắt ngang của thanh khi chịu xoắn được xác định nhờ phương pháp tương tự màng mỏng mà chúng ta sẽ nói đến sau đây.

Phương pháp tương tự màng mỏng

Trong phần xoắn thanh với mặt cắt bất kì ta đã đưa ra hàm ứng suất u với điều kiện là :

$$\tau_{xz} = \frac{\partial U}{\partial y} \text{ và } \tau_{yz} = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

Chúng ta đã đi đến phương trình Poát-xông.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -2\theta.G.$$

U được gọi là hàm ứng suất Prandtl

Ta cũng đã chứng minh được trị số mômen xoắn là :

$$M_z = 2 \iint_A U(x,y) dx dy \quad (1)$$

Bây giờ giả sử chọn một hàm F nào đó. Hàm này không nhất thiết là hàm U . Hàm F cũng thoả mãn điều kiện :

$$\tau_{xz} = \frac{\partial F}{\partial y} \quad \text{và} \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial F}{\partial x}$$

vì : $\sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2} = \tau_e$ (ứng suất tiếp toàn phần)

nên có được biểu thức.

$$\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2} = Q_t \quad (Q_t \text{ là hằng số})$$

Hay bình phương của hai vế ta có :

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 = Q_t^2$$

Phần bên trái biểu diễn bình phương của gradien của hàm F . Ta có :

$$|\overline{\text{grad.}(F)}| = Q_t$$

Cũng dễ dàng đi đến biểu thức tương tự như (1)

$$V = 2 \iint_A F(x,y) dx dy \quad (2)$$

A là diện tích của mặt cắt.

Ở tại biên đều lấy V và $U = 0$.

So sánh (1) và (2) chúng ta thấy :

– Nếu $M_z = V$ thì hàm $F(x, y)$ chính là hàm U

– Khi đó gradien của hai hàm là như nhau.

Như vậy có nghĩa là : nếu chọn được một hàm $F(x, y)$ bằng bất cứ cách nào miễn là hai lần thể tích chứa đựng giữa mặt toạ độ và $F(x, y)$ đúng bằng trị số của mômen xoắn M_z mà ta đã biết thì gradien của nó ở mép sẽ đúng bằng trị số ứng suất tiếp toàn phần do mômen xoắn M_z gây nên tại đó. Hình dạng của mặt $F(x, y)$ thể hiện sự phân bố của ứng suất tiếp vì gradien của mặt thể hiện ứng suất tiếp toàn phần trên mặt.

Ta có một cách để chọn mặt $F(x, y)$ đó là hình dáng của màng mỏng.

Dùng một lỗ rỗng có hình dáng của mặt cắt ngang chịu xoắn. Bao lên mặt đó một màng mỏng. Cho tác dụng một hệ áp suất vuông góc với màng tạo nên một mặt cong. Ta có thể tăng giảm áp suất cho đến khi có được hai lần thể tích giữa màng và đáy bằng trị số mômen xoắn M_z . Hình ảnh của màng mỏng đó chính là U . Từ đó có thể biết được sự phân bố ứng suất tiếp trên mặt cắt do M_z gây nên. Phương pháp này do Nadai đề xuất.

Xét một số mặt cắt thanh thành màng mỏng như trên hình 22–20.

Ta nhận thấy với các mặt cắt hở góc nghiêng lớn nhất của màng là ở chỗ tiếp giáp giữa màng và thành (h.22–20a) nên ở đó ứng suất tiếp có trị số lớn nhất. Ta cũng nhận thấy luật phân bố của ứng suất tiếp là đối xứng qua đường trung gian và hệ ứng suất tạo thành một vòng khép kín (h.22–20b).

Nếu mặt cắt là gồm những đoạn thẳng mà ta có thể tưởng tượng kéo dài thành một hình chữ nhật (h.22–20b) thì ứng suất tiếp lớn nhất là giữa cạnh dài và trị số của nó là :

$$\tau_{\max} = \frac{3M_z}{\delta^2 s} \quad (22-12)$$

Góc xoay được tính với công thức :

$$\varphi = \frac{3M_z l}{G\delta^3 s} \quad (22-13)$$

(ở đây ta xem tỉ số $\frac{a}{b} = \infty$)

δ và s là chiều dày và chiều dài đường chu tuyến của mặt cắt.

Trong trường hợp không thể khai triển thành hình chữ nhật như trường hợp hình 22–21, chúng ta sẽ tính toán như sau : mômen xoắn M_z là tổng các mômen xoắn trong từng phần :

$$M_z = \frac{\varphi G}{3I} [\delta_1^3 s_1 + \delta_2^3 s_2 + \dots + \delta_n^3 s_n]$$

từ đó ta có :

$$\varphi = \frac{3M_z I}{G[\delta_1^3 s_1 + \delta_2^3 s_2 + \dots + \delta_n^3 s_n]} \quad (22-14)$$

Quan sát sự biến dạng của màng mỏng ta có thể khẳng định rằng ứng suất lớn là ở phần có độ dày $\delta_{\max}$. Giả sử đoạn đó là đoạn thứ i , vậy :

$$\tau_i = \tau_{\max} = \frac{3M_i}{\delta_i^2 s_i} \quad \text{và} \quad \varphi = \frac{3M_i l}{G\delta_i^3 s_i}$$

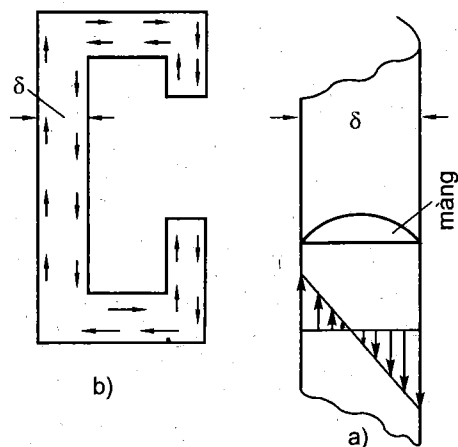
Trị số φ đó cũng là φ của toàn thể mặt cắt ngang.

Khử M_i giữa hai biểu thức ta có :

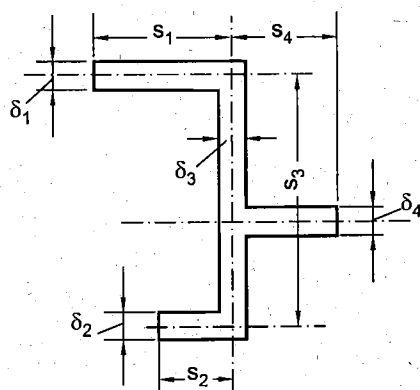
$$\tau_{\max} = \varphi G = \frac{\delta_i}{l} = \varphi G \frac{\delta_{\max}}{l}$$

Thay trị số của φ được tính từ (22–14) vào ta được :

$$\tau_{\max} = \frac{3M_z \delta_{\max}}{\delta_1^3 s_1 + \delta_2^3 s_2 + \dots + \delta_n^3 s_n} \quad (22-15)$$

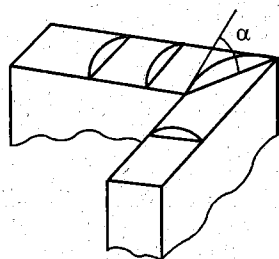


Hình 22–20

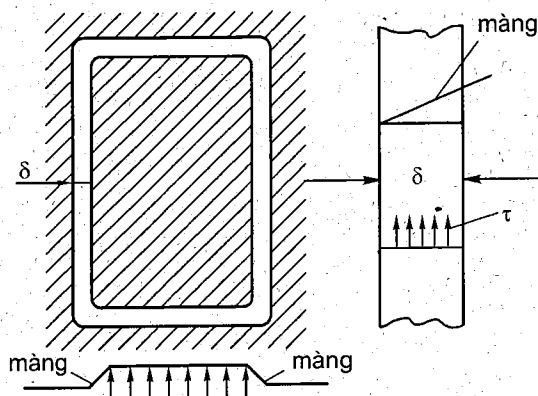


Hình 22–21

Cách tính trên đây chỉ là gần đúng vì không để ý đến hiện tượng tập trung ứng suất xảy ra ở các góc (h.22-22). Bán kính lượn tại đó càng nhỏ thì ứng suất tập trung càng lớn. Điều đó dễ dàng nhận thấy khi quan sát sự biến dạng của màng mỏng. Góc nghiêng α của màng tại điểm góc lớn hơn góc nghiêng tại các điểm khác rất nhiều.



Hình 22-22



Hình 22-23

Xét trường hợp mặt cắt ngang là một đường khép kín (h.22-23). Khác với trường hợp mặt cắt hở, ứng suất trên thành là phân bố đều.

Thực vậy, giả sử có hai tâm tạo nên một khe hở δ theo đường chu vi khép kín hình chữ nhật như trên hình 22-23. Lấy một màng mỏng phủ kín khe hở và xem tấm ngoài là cố định. Nếu có một hệ áp suất tác dụng lên màng và tấm trong thì rõ ràng cả tấm chắn bên trong sẽ chuyển dịch và kéo màng căng đều, ở mọi nơi màng có độ nghiêng đều, từ đó suy ra trị số ứng suất tiếp ở mọi nơi là như nhau.

Xét một đoạn thanh dz vô cùng bé của một thanh thành mỏng có mặt cắt ngang là một chu vi khép kín với bề dày thay đổi chịu xoắn thuần túy (h.22-24a).

Trên đoạn thanh đó ta lại tách ra một phần tử bởi các mặt cắt theo chiều dày của thanh (h.22-24b) và xét điều kiện cân bằng của phần tử.

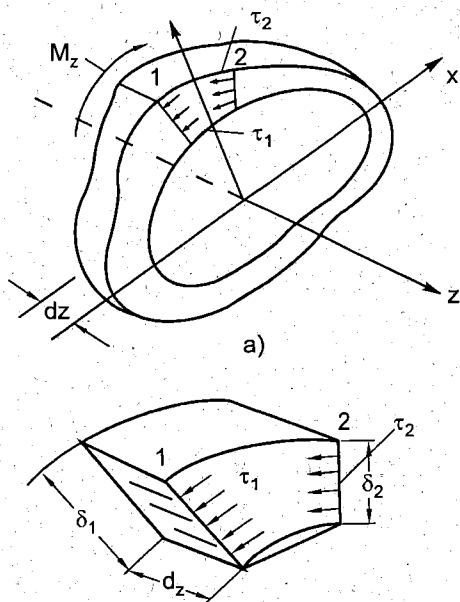
Chiếu các lực lên phương trục z ta có :

$$\tau_1 \delta_1 dz = \tau_2 \delta_2 dz$$

Vậy :

$$\tau_1 \delta_1 = \tau_2 \delta_2$$

Nói một cách khác tích $\tau \delta$ là hằng trên chu vi của mặt cắt.



Hình 22-24

Như vậy nơi nào có bề dày bé thì nơi đó có trị số ứng suất lớn.

Trị số của mômen xoắn trên mặt cắt ngang là : (h.22-25).

$$M_z = \int \tau \delta O A ds$$

O là một điểm bất kì trên mặt cắt, A là chân đường cao hạ từ O xuống phương của τ và ds là vi phân độ dài trên đường chu tuyến. Vì tích $\tau \delta$ là hằng nên ta có thể đưa ra khỏi tích phân. Do đó :

$$M_z = \tau \delta \int O A ds$$

Biểu thức tích phân chính là hai lần diện tích giới hạn bởi đường chu tuyến khép kín của mặt cắt (h.22-25). Kí hiệu diện tích đó là F^* , ta có :

$$M_z = \tau \delta . 2F^* \quad (22-16)$$

Từ đó ta có trị số của ứng suất tiếp cực đại là :

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{2F^* \delta_{\min}} \quad (22-17)$$

Góc xoắn φ được tính theo phương pháp năng lượng như sau : Ta biết rằng trong trạng thái trượt thuần túy thế năng biến dạng đàn hồi tích lũy trong một đơn vị thể tích là $\tau^2/2G$ vậy thế năng biến dạng đàn hồi tích lũy trong phân tố sẽ là :

$$du = \frac{\tau^2}{2G} \delta dz ds$$

Thế năng biến dạng đàn hồi trong toàn thanh sẽ là :

$$u = \frac{1}{2G} \int_V \tau^2 \delta dz ds = \frac{l \tau^2 \delta^2}{2G} \int \frac{ds}{\delta}$$

Biểu thức tích phân $\int \frac{ds}{\delta}$ là tùy luật biến đổi của δ theo chu vi của mặt cắt ngang. Trị số đó là một đặc trưng hình học. Thay trị số của tích $\tau \delta$ tính từ (22-16), ta được :

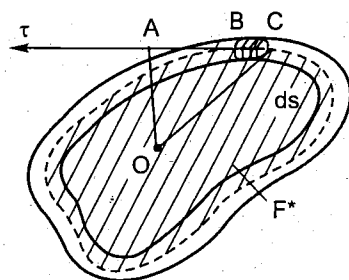
$$u = \frac{M_z^2 l}{8GF^{*2}} \int \frac{ds}{\delta}$$

Mặt khác, thế năng đó bằng công biến dạng đàn hồi của ngoại lực :

$$u = \frac{1}{2} \mu \varphi$$

Đây là trường hợp xoắn thuần túy nên $\mu = M_z$. Từ đó ta có :

$$\varphi = \frac{M_z l}{4GF^{*2}} \int \frac{ds}{\delta} \quad (22-18)$$



Hình 22-25

Nếu δ là hằng thì :

$$\varphi = \frac{Ml s}{4GF^2 \delta} \quad (22-19)$$

s là chiều dài đường chu tuyến của mặt cắt.

Ví dụ 7. Xác định ứng suất và góc xoắn trong ống thành mỏng cuốn bằng thép lá trong hai trường hợp :

- Khi mép ống được tự do (h.22-26a)
- Khi mép ống bị dính chặt (h. 22-26b)

Bài giải

Theo phương án thứ nhất ta phải xem thanh có mặt cắt hở. Bỏ qua chỗ nối, theo công thức (22-12) và (22-13) ta có :

$$\tau_a = \frac{3\mu}{\pi D \delta^2} \quad \varphi_a = \frac{3\mu l}{G\pi D \delta^3}$$

Theo phương án thứ hai thanh được xem có mặt cắt kín. Theo công thức (22-17) và (22-19) ta có :

$$\tau_b = \frac{\mu}{2 \frac{\pi D^2}{4} \delta}, \quad \varphi_b = \frac{\mu l \pi D}{4G \left(\frac{\pi D^2}{4} \right)^2 \delta}$$

Để có thể so sánh hai trường hợp ta lập các tỉ số :

$$\frac{\tau_a}{\tau_b} = \frac{3}{2} \cdot \frac{D}{\delta}; \quad \frac{\varphi_a}{\varphi_b} = \frac{3}{4} \cdot \frac{D^2}{\delta^2}$$

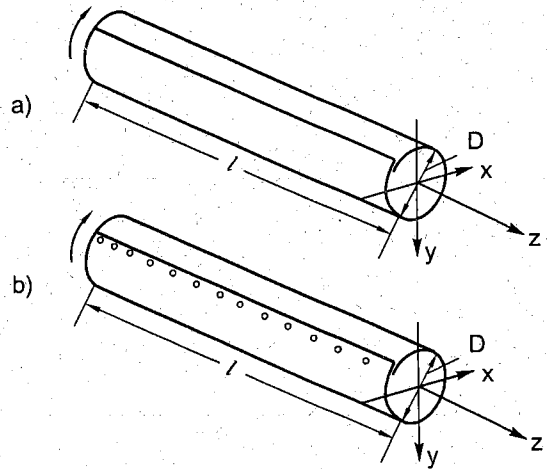
Như vậy độ lớn của các ứng suất với tỉ lệ cùng độ lớn với tỉ số $\frac{D}{\delta}$ và các góc xoắn có tỉ lệ cùng độ lớn với tỉ số $\frac{D^2}{\delta^2}$. Vì D lớn hơn δ rất nhiều do đó với thanh có mặt cắt khép kín có độ cứng và độ chịu lực lớn hơn mặt cắt hở.

§22-5. ĐỘ VÊNH CỦA MẶT CẮT NGANG KHI CHỊU XOẮN

Khi thanh thành mỏng hở chịu xoắn thuần túy, mặt cắt ngang của thanh bị vênh. Để tính toán độ vênh ta dựa vào giả thuyết sau đây :

Giả thiết biến dạng của thanh là bé như vậy trong quá trình thanh biến dạng, chu tuyến của mặt cắt ngang vẫn giữ hình dạng ban đầu.

Xét thanh thành mỏng hở chịu xoắn như hình vẽ 22-27a.



Hình 22-26

Giả sử khi chịu xoắn, mặt cắt ngang của thanh bị xoay quanh một điểm O nào đó mà được gọi là tâm xoắn.

Khảo sát phân tố ABCD như hình vẽ 22-27. Sau biến dạng điểm A đến vị trí A', B đến B' và C đến C'. DA, DA' tạo thành một góc α và DC và DC' tạo thành một góc β . Góc trượt γ sẽ là tổng của $\alpha + \beta$. Ta tính các góc đó :

Như hình vẽ ta có :

$$\alpha = \frac{AA'}{dz}$$

Chuyển vị $AA' = rd\varphi$; r là khoảng cách từ tâm xoắn đến đường tiếp tuyến với chu tuyến qua A, $d\varphi$ là góc xoắn tương đối giữa hai mặt cắt qua CD và AB.

Vậy :

$$\alpha = \frac{rd\varphi}{dz} = r\theta$$

trong đó θ là góc xoắn tỉ đối của thanh.

Gọi w là chuyển vị của các điểm trên mặt cắt theo phương của trục z .

Ta có :

$$\beta = \frac{dw}{ds}$$

Góc trượt γ có trị số là :
$$\gamma = r\theta + \frac{dw}{ds} = \frac{\tau}{G}$$

Trên đường trung gian, góc xoay của màng mỏng tại đó là bằng không nên $\tau = 0$, vậy có phương trình vi phân :

$$dw = -\theta r ds = -\theta d\omega$$

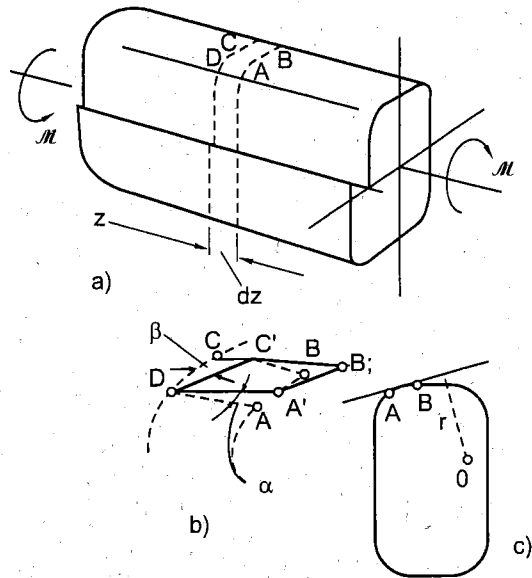
trong đó $d\omega$ là vi phân tọa độ quạt của chu tuyến mặt cắt ngang. Lấy tích phân ta có :

$$w = -\theta \int d\omega = -\theta \omega \quad (22-20)$$

Từ đó ta có kết luận : độ vênh của mặt cắt ngang dọc theo đường chu tuyến biến thiên theo tọa độ quạt của chu tuyến. Công thức (22-20) là chưa xác định, vì chưa xác định cực P và gốc O của tọa độ quạt ω , song công thức đó cho thấy độ vênh của mặt cắt ngang phụ thuộc vào góc xoắn tỉ đối θ . Ngược lại nếu độ vênh bị hạn chế thì θ sẽ thay đổi.

Sự thay đổi của θ theo z tạo nên một hệ ứng suất pháp và ứng suất tiếp phụ. Thực vậy giả sử xét một đoạn thanh dz (h.22-28a). Biến dạng theo phương z là :

$$\epsilon_z = \frac{dw}{dz} = -\frac{d\theta}{dz} \omega$$



Hình 22-27

Ứng suất pháp σ_z tương ứng với biến dạng đó là :

$$\sigma_z = -E\omega \frac{d\theta}{dz} \quad (22-21a)$$

Nếu σ_z là một hàm số biến thiên theo z thì nó gây nên một hệ ứng suất tiếp τ_2 phân bố đều trên mặt cắt. Xét một phân tố tách ra từ đoạn thanh dz (h.22-28b). Vì trị số ứng suất pháp trên hai mặt cắt là khác nhau nên phải xuất hiện τ_2 . Chiều tất cả các lực xuống phương z ta tìm thấy.

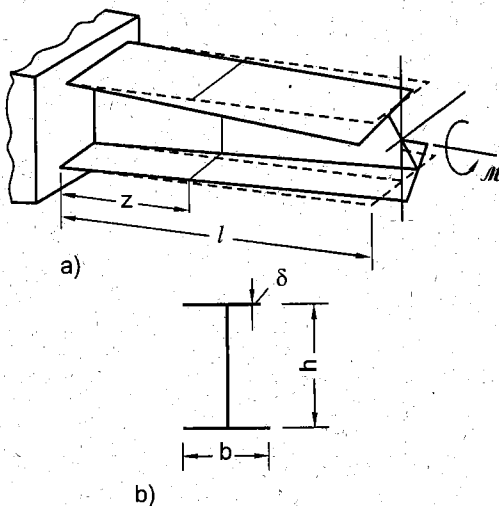
$$\tau_2 \delta = - \int_{F^c} \frac{d\sigma_z}{dz} dF$$

trong đó F^c là phần diện tích trên mặt cắt ngang của phân tố đang xét. Thay trị số của σ_z từ (22-21a) vào đây ta được :

$$\tau_2 \delta = E \frac{d^2\theta}{dz^2} \int_{F^c} \omega dF \quad (22-22)$$

Sự xuất hiện τ_2 phủ định điều cho rằng ứng suất tiếp trên đường trung gian là bằng không và khi θ thay đổi theo z thì độ vênh không tuân theo định luật phân bố của tọa độ quạt nữa. Song với một mức độ gần đúng có thể tiếp nhận các công thức τ_2 và σ_z như trên.

§22-6. XOẮN KIỂM CHẾ THANH THÀNH MỎNG CÓ MẶT CẮT HỖ



Hình 22-29

Ta hiểu xoắn kiểm chế là khi có những liên kết hạn chế độ vênh của mặt cắt ngang. Ví dụ thanh chịu ngàm một đầu, một đầu tự do chịu xoắn thuần túy (h.22-29a).

Mặt cắt tại đầu ngàm có thành phần chuyển vị w bằng không. Ở đây không có độ vênh của mặt cắt ngang. Càng xa đầu ngàm sự xoắn càng tự do, độ vênh của mặt cắt ngang càng lớn vì trên mặt cắt ngang của thanh không có thành phần lực dọc và mômen uốn do ngoại lực gây nên, do đó thành phần ứng suất pháp σ_z do xoắn gây nên phải tạo nên một hệ nội lực tự cân bằng. Ta có :

$$\int_F \sigma_z y dF = 0; \quad \int_F \sigma_z x dF = 0; \quad \int_F \sigma_z dF = 0;$$

Thay trị số σ_z được tính từ (22-21) vào ta được :

$$\int_F \omega_y dF = 0 ; \int_F \omega_x dF = 0 ; \int_F \omega dF = 0 ;$$

Tọa độ quạt ω được tính đối với tâm xoắn. Hai biểu thức đầu chứng tỏ tâm xoắn trùng với cực chính của mặt cắt. Nói một cách khác tâm xoắn cũng là tâm uốn. Biểu thức thứ ba xác định điểm gốc ω là gốc chính.

Ứng suất tiếp trên mặt cắt ngang tạo nên mômen xoắn gồm hai thành phần :

$$M_z = M_1 + M_2$$

M_1 là mômen xoắn do ứng suất tiếp vòng gây nên (h.22-20). Trị số M_1 được xác định bởi biểu thức :

$$M_1 = GJ_d \theta \quad (22-23)$$

trong đó J_d là một đặc trưng hình học của mặt cắt ngang mà ta gọi là độ cứng khi xoắn (xem chương xoắn thuần túy). Ví dụ với trường hợp mặt cắt ngang có thể khai triển thành hình chữ nhật thì từ công thức (22-13) ta có :

$$J_d = \frac{\delta_s^3}{3}$$

Hay với mặt cắt không thể khai triển được thành hình chữ nhật thì :

$$J_d = \frac{\delta_1^3 s_1 + \delta_2^3 s_2 + \dots + \delta_n^3 s_n}{3}$$

M_2 là mômen xoắn do ứng suất tiếp luồng τ_2 gây nên (h.22-28)

$$M_2 = \int_S \tau_2 \delta r ds = \int_F \tau_2 \delta d\omega$$

Thay trị số τ_2 từ (22-22) vào ta có :

$$M_2 = E \frac{d^2 \theta}{dz^2} \int_F \left(\int_{F^c} \omega dF \right) d\omega$$

Sử dụng tích phân đoạn có thể viết lại như sau :

$$M_2 = E \frac{d^2 \theta}{dz^2} \left[\omega \int \omega dF \Big|_{s_1}^{s_2} - \int \omega^2 dF \right]$$

Song $\int \omega dF \Big|_{s_1}^{s_2} = 0$ (h.22-15) do đó :

$$M_2 = -EJ_\omega \frac{d^2 \theta}{dz^2} \quad (22-24)$$

Vậy mômen xoắn trên mặt cắt ngang là :

$$M_z = GJ_d \theta - E \frac{d^2 \theta}{dz^2} J_\omega$$

Nếu kí hiệu $\frac{GJ_d}{EJ_{\omega}} = \alpha^2$ thì phương trình vi phân trên có thể viết lại dưới dạng :

$$\frac{d^2\theta}{dz^2} - \alpha^2\theta = -\alpha^2 \frac{M_z}{GJ_d} \quad (22-25)$$

trong đó M_z là một hàm đối với z được xem là đã biết.

Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân đó là :

$$\theta = C_1 \sinh \alpha z + C_2 \cosh \alpha z + \theta^* \quad (22-26)$$

θ^* là một nghiệm riêng của (22-25).

Các hằng số C_1, C_2 được xác định từ điều kiện liên kết của dầm.

Ví dụ 8. Xác định ứng suất pháp và ứng suất tiếp trong thanh chữ I ngàm một đầu và đầu tự do chịu xoắn như hình 22-29. Các số liệu cho như sau : $h = 200\text{mm}$; $b = 100\text{mm}$; $\delta = 10\text{mm}$; $l = 1\text{m}$; $\mu = 0,3$; $E = 2.10^7 \text{ N/cm}^2$.

Bài giải

Ở đây ta có $M_z = \mu = C^0$ do đó phương trình vi phân của góc xoắn có dạng :

$$\frac{d^2\theta}{dz^2} - \alpha^2\theta = -\frac{\alpha^2\mu}{GJ_d}$$

Nghiệm riêng được chọn dưới dạng

$$\theta^* = \frac{\mu}{GJ_d}$$

Vậy nghiệm tổng quát là :

$$\theta = C_1 \sinh \alpha z + C_2 \cosh \alpha z + \frac{\mu}{GJ_d}$$

C_1, C_2 được xác định từ các điều kiện biên sau đây : khi $z = 0$, $w = 0$, khi $z = l$ ứng suất pháp bằng không.

Từ các biểu thức (22-20) và (22-21) các điều kiện đó có thể viết lại như sau :

khi $z = 0$ thì $\theta = 0$ và khi $z = l$ thì $\frac{d\theta}{dz} = 0$. Do đó ta có hệ phương trình :

$$C_2 + \frac{\mu}{GJ_d} = 0$$

$$C_1 \alpha \sinh \alpha l + C_2 \alpha \cosh \alpha l = 0$$

Hệ thống phương trình đó cho ta các trị số của C_1 và C_2 như sau :

$$C_2 = -\frac{\mu}{GJ_d}, C_1 = \frac{\mu}{GJ_d} \tanh \alpha l$$

Vậy phương trình của góc xoắn tỷ đối là :

$$\theta = \frac{\mu}{GJ_d} [1 + \text{th}\alpha l \cdot \text{sh}\alpha z - \text{ch}\alpha z]$$

Góc xoắn lớn nhất là tại đầu mút tự do :

$$\varphi = \int_0^l \theta dz = \frac{\mu l}{GJ_d} \left[1 - \frac{1}{\alpha l} \text{th}\alpha l \right]$$

Ứng suất pháp lớn nhất là tại ngàm :

$$\sigma_z = -E\omega \frac{d\theta}{dz} \Big|_{z=0} = -\frac{E\mu}{GJ_d} \omega \alpha \text{th}\alpha l$$

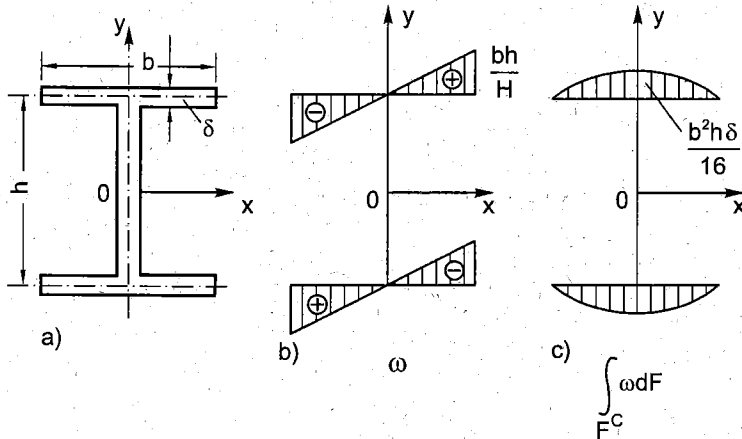
Trị số mômen xoắn M_1 và M_2 tại một mặt cắt bất kì là :

$$M_1 = GJ_d \theta = \mu(1 + \text{th}\alpha l / \text{sh}\alpha z - \text{ch}\alpha z)$$

$$M_2 = -EJ_\omega \frac{d^2\theta}{dz^2} = -\mu(\text{th}\alpha l \cdot \text{sh}\alpha z - \text{ch}\alpha z)$$

Để tính J_ω ta vẽ biểu đồ quạt chính như trên hình 22-30b. Từ phép nhân biểu đồ theo Vêrêsinhin ta có :

$$J_\omega = \frac{1}{24} b^3 h^2 \delta$$



Hình 22-30

Độ cứng khi xoắn của mặt cắt là :

$$J_d = \frac{1}{3} \delta^3 (2b + h)$$

Do đó hệ số α được xác định như sau :

$$\alpha^2 = \frac{4}{1 + \mu} \cdot \frac{\delta^2 (2b + h)}{b^3 h^2} = 3,08 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{mm}^2}$$

$$\alpha = 1,75 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{mm}} ; \alpha l = 1,75.$$

Tra bảng các hàm hypecbôlit, tìm thấy : $\frac{1}{\alpha l} \text{th}\alpha l = \frac{0,9411}{1,75} = 0,537$

Từ đó ta có góc xoắn ở đầu tự do là : $\varphi = \frac{\mu l}{GJ_d} \cdot 0,46$

Sò sánh với trường hợp thanh có hai đầu tự do, khi đó góc xoắn của thanh là $\varphi = \frac{\mu l}{GJ_d}$, ta thấy khi có đầu ngàm góc xoắn giảm đi một nửa.

Trị số của ứng suất pháp lớn nhất là :

$$\sigma_{\max} = \frac{E\mu b h}{GJ_d 4} \cdot \alpha \theta \alpha l = 161 \cdot 10^{-3} \mu \text{N/cm}^2$$

Trị số của μ phải tính theo Ncm.

Trị số ứng suất tiếp lớn nhất là ;

$$\tau_{1\max} = \frac{3M_1}{\delta^2(2b+h)}$$

$$\tau_{2\max} = -\frac{M_2}{J_{\omega}\delta} \int_{F^c} \omega dF$$

tại ngàm $M_1 = 0$, $M_2 = \mu$

do đó $\tau_{1\max} = 0$.

$$\tau_{2\max} = -\frac{\mu}{J_{\omega}\delta} \left(\int_{F^c} \omega dF \right)_{\max} = \pm \frac{3}{2} \cdot \frac{\mu}{bh\delta} = \pm 7,5 \cdot 10^{-3} \mu \text{N/cm}^2$$

Điểm có $\tau_{2\max}$ là giao điểm giữa lòng và đế vì tại đó $\int_{F^c} \omega dF$ là lớn nhất (h.22-30c).

Tại đầu tự do khi $z = l$; M_1 và M_2 có trị số là ;

$$M_1 = 0,6614\mu ; M_2 = 0,3386\mu.$$

Vậy : $\tau_{1\max} = 49,6 \cdot 10^{-3} \mu \text{N/cm}^2 ; \tau_{2\max} = 2,5 \cdot 10^{-3} \mu \text{N/cm}^2$

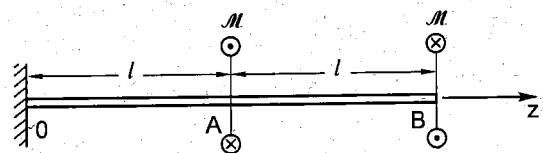
Nếu không phải là xoắn kiềm chế thì ;

$$\tau_{1\max} = \frac{3\mu}{\delta^2(2b+h)} = 75 \cdot 10^{-3} \mu \text{N/cm}^2 ; \tau_{2\max} = 0$$

Ví dụ 9. Xác định góc xoắn tại A của thanh thành mỏng chịu tác dụng của hai mômen xoắn ngược chiều như hình 22-31.

Bài giải

Nếu OB không phải là thanh thành mỏng thì góc xoắn tại A là bằng không. Ở đây vì là thanh thành mỏng nên tại A có góc xoắn.



Hình 22-31

Viết phương trình góc xoắn tỉ đối cho cả hai đoạn OA và AB. Với OA vì $M_z = 0$ nên phương trình có dạng :

$$\theta_1 = C_1 \operatorname{sh} \alpha z + C_2 \operatorname{ch} \alpha z$$

với đoạn AB

$$\theta_2 = C_3 \operatorname{ch} \alpha z + C_4 \operatorname{ch} \alpha z + \frac{\mu}{GJ_d}$$

Các điều kiện biên để xác định các hằng số tích phân như sau :

Tại $z = 0, \theta_1 = 0$

Tại $z = l, \theta_1 = \theta_2$ và $\frac{d\theta_1}{dz} = \frac{d\theta_2}{dz}$ vì tại đó độ vênh và ứng suất phải như nhau : tại

$z = 2l, \frac{d\theta_2}{dz} = 0$ vì $\sigma_z = 0$.

Với các điều kiện biên đó ta thiết lập được hệ phương trình :

$$\left. \begin{aligned} C_1 \operatorname{sh} \alpha l - C_3 \operatorname{sh} \alpha l - C_4 \operatorname{ch} \alpha l &= \frac{\mu}{GJ_d} \\ C_1 \operatorname{ch} \alpha l - C_3 \operatorname{ch} \alpha l - C_4 \operatorname{sh} \alpha l &= 0 \\ C_3 \operatorname{ch} 2\alpha l + C_4 \operatorname{sh} 2\alpha l &= 0 \\ C_2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Từ đó ta tìm thấy : $C_1 = \frac{\mu \operatorname{sh} \alpha l}{GJ_d \operatorname{ch} 2\alpha l}, \theta_1 = \frac{\mu}{GJ_d} \cdot \frac{\operatorname{sh} \alpha l}{\operatorname{ch} 2\alpha l} \operatorname{sh} \alpha z$

Vậy góc xoắn tại A là : $\varphi = \int_0^l \theta dz = \frac{\mu}{\alpha GJ_d} \cdot \frac{\operatorname{sh} \alpha l}{\operatorname{ch} 2\alpha l} (\operatorname{ch} \alpha l - 1)$

Trị số α được xác định tính từ biểu thức $\alpha^2 = \frac{GJ_d}{EJ_\omega}$

Như vậy góc xoắn tại A là do sự vênh của mặt cắt ngang giữa hai đoạn gây nên.

§22-7. TRƯỜNG HỢP CHỊU LỰC TỔNG QUÁT CỦA THANH THÀNH MỎNG HỎ

1. Bimômen

Như chúng ta đã nói, khi θ là một hàm đối với z thì do sự vênh của mặt cắt ngang mà trên mặt cắt xuất hiện một hệ ứng suất tiếp τ_2 và hệ ứng suất pháp phụ :

$$\sigma_z = -E\omega \frac{d\theta}{dz} \quad (22-21b)$$

τ_2 gây nên mômen xoắn M_2 mà ta đã tính, σ_z gây nên một hệ nội lực tự cân bằng. Để thoả mãn điều kiện cân bằng đó ω phải được tính từ cực chính và góc chính.

Bây giờ ta hãy chú ý đến biểu thức sau đây :

$$B = \int_F \sigma_z \omega dF = - \int_F E \omega^2 \frac{d\theta}{dz} dF$$

hay :

$$B = -E \frac{d\theta}{dz} \int_F \omega^2 dF$$

Vậy :

$$B = -E \frac{d\theta}{dz} J_\omega \quad (22-27)$$

Ta gọi trị số đó là Bimômen. Nếu thay (22-27) vào (22-21b) sẽ có :

$$\sigma_z = \frac{B}{J_\omega} \omega \quad (22-28)$$

Biểu thức này có dạng tương tự như ứng suất pháp do mômen uốn gây nên. Thứ nguyên của bimômen là Ncm^2 . Đó là một hệ nội lực tự cân bằng.

Ví dụ với thanh chữ I chịu tác dụng của bốn lực P ở các đỉnh. Bốn lực này tạo thành hai ngẫu lực tự cân bằng (h. 22-32). Theo định nghĩa ta có :

$$B = \int_F \sigma_z \omega dF = \sum_{i=1}^4 P_i \omega_i$$

ω_i được tính với cực chính và góc chính. Ở đây các điểm đó trùng với trọng tâm của mặt cắt. Do đó ta có :

$$B = 4P \frac{bh}{4} = Pbh$$

Trên mặt cắt ngang có trị số của bimômen mà không có lực dọc cũng như mômen uốn.

2. Trường hợp chịu lực tổng quát của thanh thành mỏng

Trong trường hợp thanh chịu lực tổng quát, hệ ứng suất pháp trên mặt cắt ngang là do lực dọc, các mômen uốn và bimômen gây nên. Vì vậy :

$$\sigma_z = \frac{N_z}{F} + \frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x + \frac{B}{J_\omega} \omega$$

Ứng suất tiếp trên mặt cắt sẽ do lực cắt Q_x , Q_y , mômen xoắn M_z và do xoắn kìm chế gây nên. Ta có :

$$\tau = \frac{Q_y S_x^*}{J_x \delta} + \frac{Q_x S_y^*}{J_y \delta} ; \tau = \frac{3M_z}{\delta^2 s} \text{ hoặc}$$

$$\tau_1 = \frac{3M_z \delta_{\max}}{\delta_1^3 s_1 + \delta_2^3 s_2 + \dots + \delta_n^3 s_n} ; \tau_2 = \frac{E}{\delta} \cdot \frac{d^2 \theta}{dz^2} \int_{F^c} \omega dF$$

Ví dụ 10. Cho thanh chịu lực như hình 22–32, tính góc xoắn tỉ đối của thanh.

Bài giải

Vì M_z bằng không nên nghiệm của phương trình (22–25) có dạng :

$$\theta = C_1 \sinh \alpha z + C_2 \cosh \alpha z$$

Hệ trục tọa độ xác định như hình vẽ.

Các điều kiện biên như sau :

$$\text{tại } z = 0 \quad B = Pbh$$

$$\text{tại } z = l \quad \omega = 0$$

Từ (22–27) và (22–20) ta có :

$$\left(\frac{d\theta}{dz} \right)_{z=0} = C_1 \alpha = - \frac{Pbh}{EJ_\omega}$$

$$C_1 \sinh \alpha l + C_2 \cosh \alpha l$$

Sau khi xác định được C_1 và C_2 ta tìm thấy :

$$\theta = \frac{Pbh}{\alpha EJ_\omega} [\tanh \alpha l \cosh \alpha z - \sinh \alpha z]$$

Giả sử l khá dài, khi đó $\tanh \alpha l \approx 1$ và

$$\theta = \frac{Pbh}{\alpha EJ_\omega} e^{-\alpha z}$$

Ta thấy góc xoắn tỉ đối nhỏ dần đi theo z .

Ví dụ 11. Cho thanh chịu lực trên hình 22–33a, khảo sát góc xoắn φ , góc xoắn tỉ đối θ và thành phần bimômen của các mặt cắt. Tính ứng suất trên mặt cắt ngang.

Bài giải

Lực P không những gây nên kéo, uốn mà còn gây nên xoắn đối với thanh. Vì M_x ở mọi mặt cắt ngang là bằng không nên phương trình góc xoắn tỉ đối là :

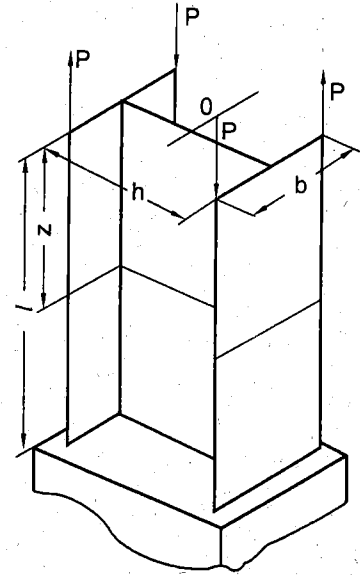
$$\theta = C_1 \cosh \alpha z + C_2 \sinh \alpha z$$

Hệ trục tọa độ xác định như hình vẽ.

Các điều kiện biên là khi $z = 0, l = 0$ trị số bimômen phải bằng :

$$B = \int_F \sigma_z \omega dF = P\omega_A$$

ω_A là tọa độ quạt của điểm đặt lực đối với cực chính và góc chính.



Hình 22–32

Từ (22-27) ta có :

$$\left(\frac{d\theta}{dz}\right)_{z=0} = \left(\frac{d\theta}{dz}\right)_{z=l}$$

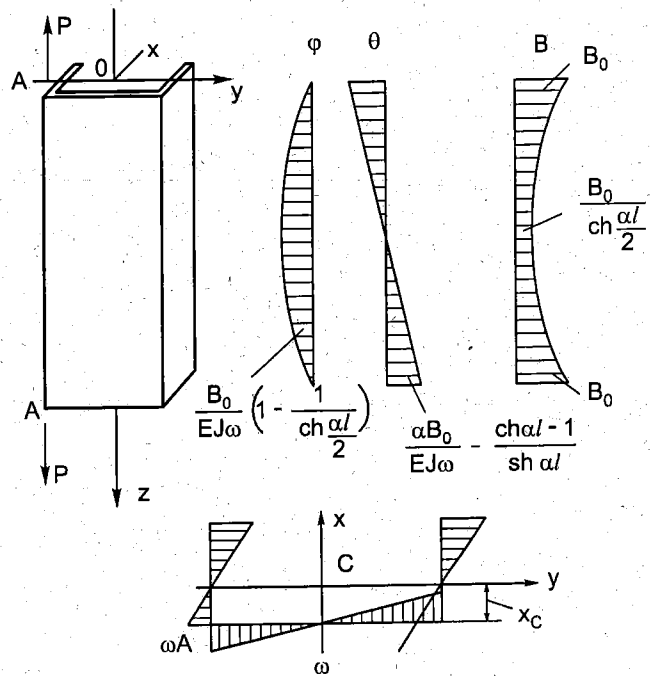
$$= -\frac{P\omega_A}{EJ_\omega} = \frac{B_0}{EJ_\omega}$$

Với các hệ thức đó ta xác định được C_1 và C_2 như sau :

$$C_1 = -\frac{B_0}{\alpha EJ_\omega} \cdot \frac{\text{ch}\alpha l - 1}{\text{sh}\alpha l} ;$$

$$C_2 = \frac{B_0}{\alpha EJ_\omega}$$

Thay vào trên ta có phương trình của góc xoắn tỉ đối là :



Hình 22-33

$$\theta = \frac{B_0}{\alpha EJ_\omega} \cdot \frac{1}{\text{sh}\alpha l} [\text{ch}\alpha z - \text{ch}\alpha(l-z)]$$

Góc xoắn tương đối giữa mặt cắt ở tọa độ z và mặt cắt đi qua gốc tọa độ là :

$$\varphi = \int_0^z \theta dz = \frac{B_0}{\alpha^2 EJ_\omega} \cdot \frac{1}{\text{sh}\alpha l} [\text{sh}\alpha z - \text{sh}\alpha l + \text{sh}\alpha(l-z)]$$

Biểu đồ biểu diễn sự biến thiên của φ và $B = -EJ_\omega \frac{d\theta}{dz}$ được biểu diễn như trên hình 22-33b, c, d.

Ứng suất pháp tại một điểm bất kì nào trên mặt cắt ngang sẽ là :

$$\sigma_z = \frac{N_z}{F} + \frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x + \frac{B}{J_\omega} \omega$$

trong đó trị số tuyệt đối của các thành phần nội lực như sau :

$$N_z = P ; M_x = P \frac{h}{2} ; M_y = Px_c$$

Bimômen được xác định với phương trình :

$$B = -\frac{B_0}{\alpha} \cdot \frac{1}{\text{sh}\alpha l} [\alpha \text{ch}\alpha z + \text{sh}\alpha(l-z)]$$

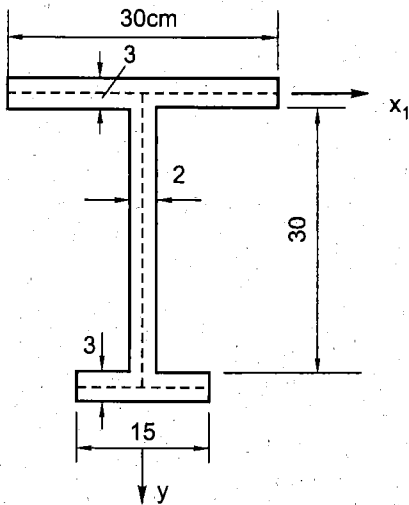
Bài tập

22.1. Chứng minh rằng mômen quán tính quạt chính của mặt cắt chữ I cánh đều có thể tính bằng công thức $I_{\omega} = \frac{J_{1y} h^2}{2}$, trong đó J_{1y} là mômen quán tính của bản cánh đối với trục y của toàn mặt cắt và h là chiều cao của mặt cắt.

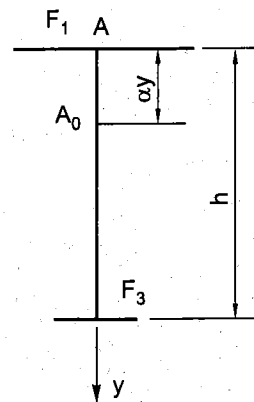
Tính mômen quán tính quạt của hình chữ I số 20.

Hướng dẫn : Lập biểu thức tổng quát của J_{ω} rồi thu gọn lại thì được kết quả trên.

22.2. Xác định vị trí tâm uốn. Vẽ biểu đồ tọa độ quạt ω , tính mômen quán tính quạt J_{ω} của mặt cắt hình chữ I vẽ ở hình 22–34.



Hình 22–34



Hình 22–35

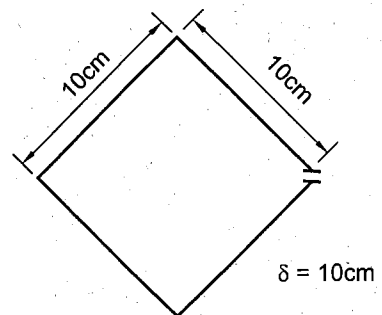
22.3. Cho hình chữ I thành mỏng hai cánh không bằng nhau (h.22–35). Chứng minh rằng :

$$\alpha_y = \frac{J_{3y} h}{J_y} ; \quad I_{\omega} = \frac{J_{1y} J_{3y} h^2}{J_y}$$

trong đó J_{1y} , J_{3y} là mômen quán tính của hình thành phần 1 và 3 đối với trục y ; J_y mômen quán tính của toàn hình đối với trục y (Trục y là trục chính trung tâm của toàn mặt cắt).

22.4. Xác định tâm uốn và tính mômen quán tính quạt của hình chữ [số 14.

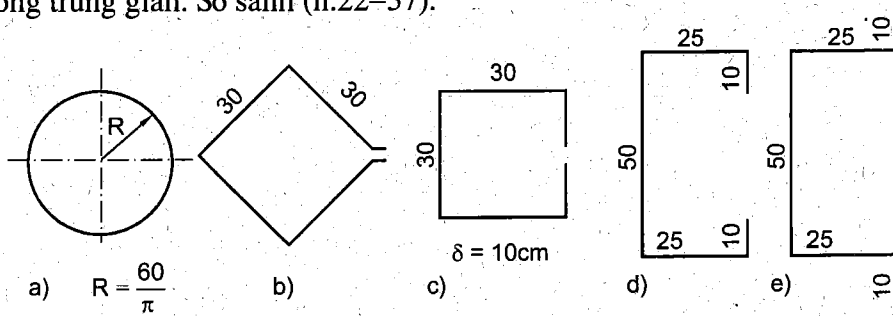
22.5. Xác định cực quạt chính, vẽ biểu đồ tọa độ quạt chính và tính mômen quán tính quạt của hình vuông mỏng hở (h.22–36).



Hình 22–36

22.6. Tính mômen quán tính quạt của hình tròn hở bán kính R .

22.7. Tính mômen quán tính quạt của năm hình có bề dày như nhau và cùng chiều dài đường trung gian. So sánh (h.22–37).

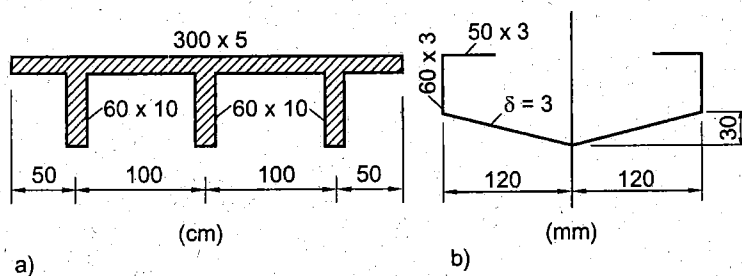


Hình 22–37

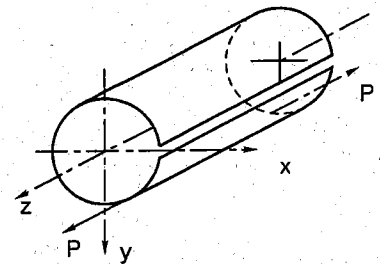
22.8. Tính mômen quán tính quạt của những mặt cắt vẽ ở hình 22–38.

22.9. Lập công thức tính ứng suất pháp trên mặt cắt ngang của một thanh tròn mỏng hở chịu lực tập trung tác dụng lệch tâm (h.22–39).

Thanh có đường kính trung bình R và bề dày δ ($\delta \ll R$).

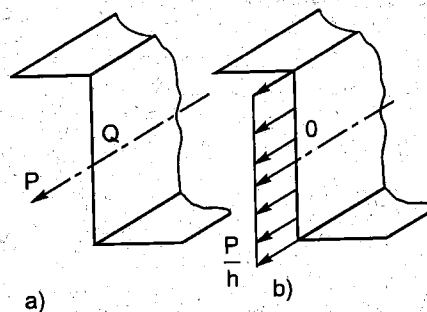


Hình 22–38



Hình 22–39

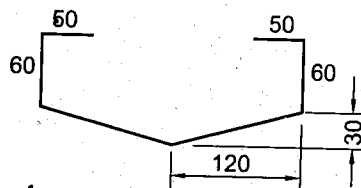
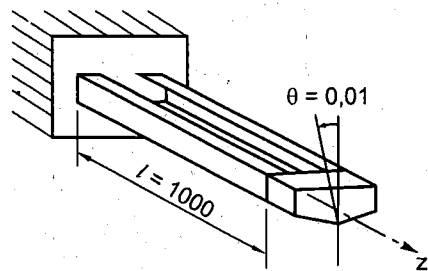
22.10. Có thanh phẳng mặt cắt hình Z kích thước ghi trên hình 22–40 chịu một lực kéo P . Tính ứng suất trên mặt cắt ngang trong trường hợp lực P đặt tập trung ở trọng tâm mặt cắt. Nếu lực P đặt phân bố đều trên bản bụng thì ứng suất có thay đổi gì không ?



Hình 22–40

22.11. Một đoạn thanh thành mỏng dài $l = 100\text{mm}$ mặt cắt có dạng như hình (22-41). Hai đầu đó liên kết hạn chế không cho mặt cắt vênh bị xoắn một góc bằng $0,01\text{ rad}$. Viết biểu thức tính góc xoắn và Bimômen. Vẽ biểu đồ ứng suất pháp ở mặt cắt đầu thanh.

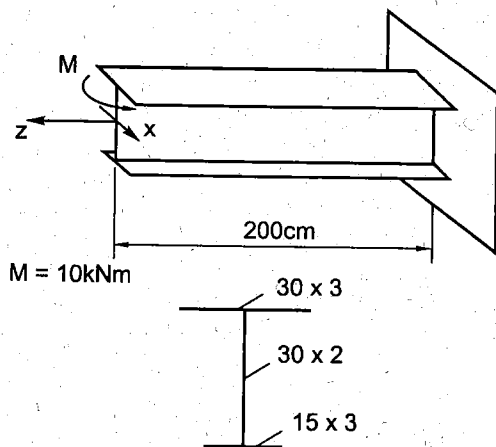
Cho $G = 8 \cdot 10^4 \text{ MN/m}^2$, $\mu = 0,3$.



Hình 22-41

22.12. Một thanh thành mỏng hở dài l bị ngàm ở đầu tự do có ngẫu lực M nằm trong mặt phẳng vuông góc với trục thanh tác dụng. Tính góc xoắn ở đầu tự do.

22.13. Một côngxôn mặt cắt hình chữ I cánh không đều chịu một ngẫu lực đặt ở đầu như hình 22-42. Vẽ biểu đồ ứng suất pháp ở đầu tự do và ở ngàm.



Hình 22-42

Chương 23

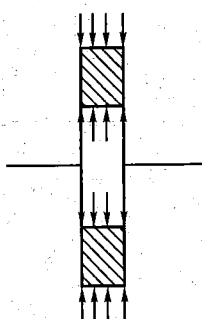
ỐNG DÀY

§23-1. KHÁI NIỆM

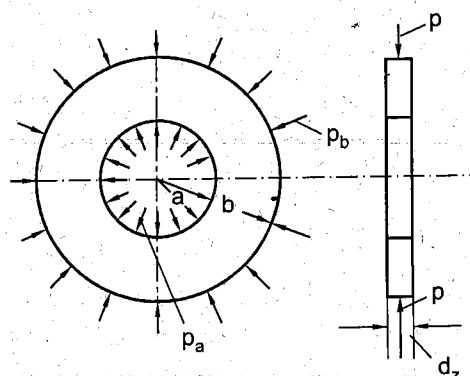
Ở đây ta chỉ xét các loại ống có mặt cắt ngang không đổi, chịu áp suất phân bố đều bên trong và bên ngoài. Ta gọi là ống dày vì chiều dày δ của thành ống không quá nhỏ so với bán kính trong a .

Trong thực tế ta gặp các loại ống khác nhau : ống có hai đáy, ống có một đáy hoặc không có đáy.

Ống có chiều dài khá lớn, nhưng cũng có chi tiết dạng ống nhưng chiều dài rất ngắn như các vòng đệm của các ổ trượt v.v... (h.23-1).



Hình 23 - 1



Hình 23 - 2

Với loại ống có chiều dài lớn, vì biến dạng theo chiều trục bị cản trở nên trên các mặt cắt ngang vuông góc với trục ống xuất hiện một hệ ứng suất pháp σ_z . Khi đó biến dạng chỉ xảy ra trên các mặt cắt ngang, vì vậy bài toán được gọi là bài toán biến dạng phẳng. Với loại chiều dài không lớn, do biến dạng theo chiều trục không bị cản trở nên không xuất hiện hệ ứng suất dọc trục. Trạng thái ứng suất là trạng thái ứng suất phẳng, nên được gọi là bài toán ứng suất phẳng.

Phương pháp giải hai bài toán là như nhau. Vì vậy trong chương này chúng ta chỉ đề ý đến bài toán ứng suất phẳng, nghĩa là thừa nhận biến dạng theo chiều trục là tự do, thành phần $\sigma_z = 0$. Để đơn giản bài toán, ta đưa ra giả thiết sau đây :

Mặt cắt ngang của ống trước và sau biến dạng vẫn phẳng và thẳng góc với trục của ống. Điều đó có nghĩa là mọi điểm trên mặt cắt ngang có ε_z như nhau.

Xét một lát mỏng được tách ra bởi hai mặt cắt ngang cách nhau một khoảng cách d_z (h.23-2).

Kí hiệu a, b là các bán kính trong và ngoài của ống. Giả sử ống chịu áp suất phân bố đều bên trong p_a và bên ngoài p_b .

Vấn đề đặt ra là phải xác định được trạng thái ứng suất và chuyển vị của các điểm trên thành ống.

§23-2. CÔNG THỨC ỨNG SUẤT VÀ CHUYỂN VỊ

1. Tương quan giữa chuyển vị và biến dạng

Vì tính chất đối xứng, một điểm nào đó trên thành ống chỉ có thể có thành phần chuyển vị theo hướng kính u và u là hàm số theo r , $u = u(r)$. Ta hãy xét hai điểm A và B nằm trên cùng đường bán kính r cách nhau khoảng cách vô cùng bé dr (h.23-3).

Gọi u là chuyển vị của A thì chuyển vị của B sẽ là $u + \frac{\partial u}{\partial r} dr$

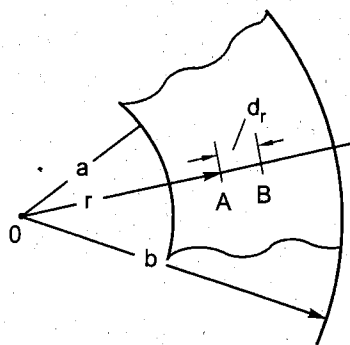
Vậy biến dạng theo chiều hướng kính của AB là : $\epsilon = \frac{\partial u}{\partial r}$

Vì u là hàm số chỉ phụ thuộc vào r nên biểu thức đó được viết lại như sau :

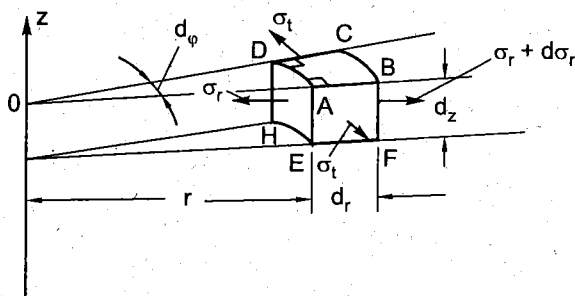
$$\epsilon = \frac{du}{dr} \quad (23-1)$$

Xét biến dạng theo phương tiếp tuyến tại A. Chu vi của đường tròn đi qua A trước khi biến dạng là $2\pi r$. Sau biến dạng, điểm A có chuyển vị u nên đường tròn qua A có chiều dài là $2\pi(r + u)$. Vậy biến dạng theo phương tiếp tuyến là :

$$\epsilon_r = \frac{2\pi(r + u) - 2\pi r}{2\pi r} = \frac{u}{r} \quad (23-2)$$



Hình 23-3



Hình 23-4

2. Phương trình vi phân cân bằng

Tách ra khỏi A một phần tử ABCDEFGH bằng các mặt cắt sau đây : hai mặt trụ đi qua A, B, hai mặt cắt chứa trục z của ống và tạo với nhau một góc $d\phi$ (h.23-4).

Vì u chỉ phụ thuộc r nên những điểm có cùng khoảng cách đến trục phải có cùng chuyển vị. Nói một cách khác các góc vuông của phần tử không thay đổi trong quá trình ống biến dạng. Phần tử không có biến dạng góc, vậy trên các mặt cắt không có ứng suất

tiếp. Nói một cách khác, các mặt của phân tố là các mặt chính. Nếu kí hiệu ứng suất pháp trên mặt AEHD là σ_r thì ứng suất pháp trên mặt BFGC là $\sigma_r + d\sigma_r$; Vì lí do đối xứng nên ứng suất pháp σ_t trên các mặt ABFE và DCGH là bằng nhau. Ứng suất pháp σ_z trên mặt cắt ABCD và EFGH được xem là bằng không, vì ε_z không bị cản trở.

Chiếu tất cả các lực lên phương phân giác của $d\phi$ ta có phương trình :

$$\sigma_r \cdot d\phi \cdot r \cdot dz - (\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr)d\phi \cdot dz + 2\sigma_t \cdot d_z \cdot dr \cdot \sin \frac{d\phi}{2} = 0$$

Sau khi rút gọn và bỏ qua các số hạng vô cùng bé bậc cao ta được :

$$\sigma_r - \sigma_t + r \cdot \frac{d\sigma_r}{dr} = 0 \quad (23-3)$$

Đó là phương trình vi phân cân bằng của phân tố.

3. Tương quan giữa ứng suất và biến dạng

Như trên chúng ta vừa phân tích, trạng thái ứng suất của phân tố là trạng thái ứng suất phẳng, vì vậy ta có các tương quan giữa biến dạng và ứng suất theo định luật Húc như sau :

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_t &= \frac{1}{E}[\sigma_t - \mu\sigma_r] \\ \varepsilon_r &= \frac{1}{E}[\sigma_r - \mu\sigma_t] \\ \varepsilon_z &= -\frac{\mu}{E}[\sigma_t + \sigma_r] \end{aligned} \right\} \quad (23-4)$$

Trong đó μ là hệ số Poát-xông

Vì mọi điểm trên mặt cắt đều có ε_z như nhau nên có thể xem ε_z là một hằng không phụ thuộc vào r . Vậy từ biểu thức thứ ba của (23-4) ta có thể viết :

$$\sigma_t + \sigma_r = 2A \quad (23-5)$$

A là một hằng số nào đó. Thay (23-5) vào (23-3) ta được :

$$2\sigma_r + r \frac{d\sigma_r}{dr} = 2A$$

Nhân cả hai vế với r , phương trình có dạng :

$$2r \cdot \sigma_r + r^2 \frac{d\sigma_r}{dr} = 2Ar$$

Hay

$$\frac{d}{dr}(r^2 \cdot \sigma_r) = 2Ar$$

Sau khi lấy tích phân ta có :

$$r^2 \sigma_r = Ar^2 + B \quad (23-6)$$

Trong đó B là hằng số tích phân. Kết hợp giữa (23-6) và (23-5) ta tìm thấy :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= A + \frac{B}{r^2} \\ \sigma_t &= A - \frac{B}{r^2} \end{aligned} \right\} \quad (23-7)$$

Các hằng số A và B được xác định từ các điều kiện biên sau đây :

Khi $r = a$, $\sigma_r = -p_a$ và khi $r = b$, $\sigma_r = -p_b$. Ta có hệ phương trình :

$$A + \frac{B}{a^2} = -p_a ; A + \frac{B}{b^2} = -p_b$$

Giải hệ phương trình đó ta có :

$$A = \frac{p_a \cdot a^2 - p_b \cdot b^2}{b^2 - a^2} ; B = \frac{a^2 \cdot b^2 (p_b - p_a)}{b^2 - a^2} \quad (23-8)$$

Vậy ứng suất σ_r và σ_t có trị số là :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{p_a \cdot a^2 - p_b \cdot b^2}{b^2 - a^2} + \frac{a^2 \cdot b^2 (p_b - p_a)}{(b^2 - a^2)r^2} \\ \sigma_t &= \frac{p_a \cdot a^2 - p_b \cdot b^2}{b^2 - a^2} - \frac{a^2 \cdot b^2 (p_b - p_a)}{(b^2 - a^2)r^2} \end{aligned} \right\} \quad (23-9)$$

Các công thức đó được gọi là công thức của Lamê.

Kết hợp (23-2) và biểu thức thứ nhất của (23-4) ta có :

$$u = \frac{1}{E} (\sigma_t - \mu \sigma_r) \cdot r$$

Thay (23-7) vào đây ta có công thức của chuyển vị :

$$u = \frac{1 - \mu}{E} A \cdot r - \frac{1 + \mu}{E \cdot r} B \quad (23-10)$$

Trong đó A và B được xác định theo (23-8).

§23-3. CÁC TRƯỜNG HỢP RIÊNG QUAN TRỌNG

1. Ống chịu áp suất bên trong : $p_a = p$, $p_b = 0$

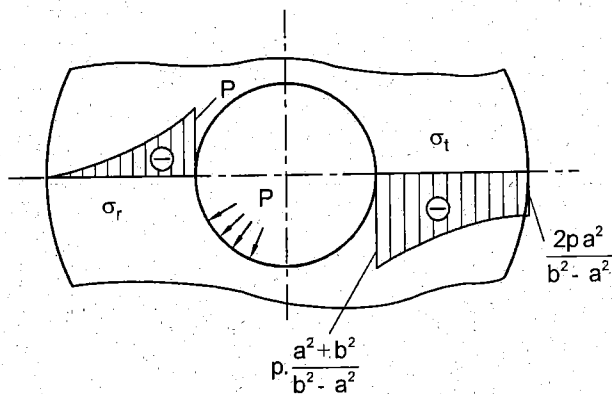
Công thức của ứng suất và chuyển vị được viết lại dưới dạng :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{p \cdot a^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) \\ \sigma_t &= \frac{p \cdot a^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right) \\ u &= \frac{p \cdot a^2}{E(b^2 - a^2)} \left[(1 - \mu)r + (1 + \mu) \frac{b^2}{r} \right] \end{aligned} \right\} \quad (23-11)$$

Biểu đồ biến thiên của σ_r và σ_t dọc theo một bán kính được biểu diễn như trên hình (h.23-5).

Qua các biểu đồ đó ta thấy điểm nguy hiểm nhất là điểm ở mép trong. Nếu sử dụng thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất ta có ứng suất tương đương là :

$$\begin{aligned}\sigma_{td} &= p \cdot \frac{a^2 + b^2}{b^2 - a^2} + p \\ &= p \cdot \frac{2b^2}{b^2 - a^2} \quad (23-12)\end{aligned}$$



Hình 23-5

Điều kiện bền của ống là :

$$\sigma_{td} = p \cdot \frac{2b^2}{b^2 - a^2} \leq [\sigma] \quad (23-13)$$

Ta xét hai trường hợp giới hạn khi δ thay đổi như sau :

a) Khi $b \approx a$. Ống có thành mỏng. Độ dày δ là bé, khi đó ta có : $b = a + \delta$.

Biểu thức ứng suất σ_t (23-11) được viết lại dưới dạng :

$$\sigma_t = \frac{p \cdot a^2}{\delta(2a + \delta)} \left[1 + \frac{(a + \delta)^2}{r^2} \right]$$

Trị số của σ_t tại hai điểm : ứng với $r = a$ và $r = b$ là :

$$\sigma_{t(r=a)} = p \cdot \frac{(a + \delta)^2 + a^2}{\delta(2a + \delta)} ; \sigma_{t(r=b)} = p \cdot \frac{2a^2}{\delta(2a + \delta)}$$

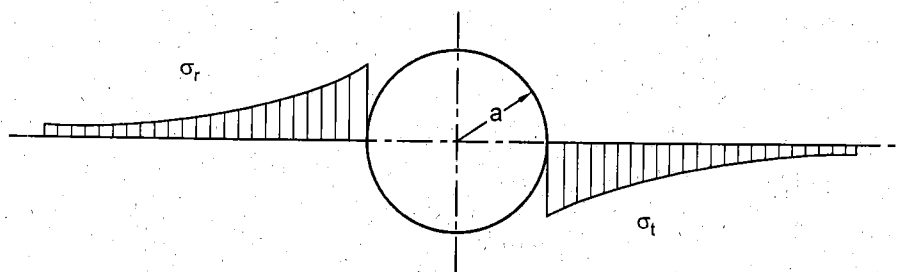
Từ hai biểu thức đó ta thấy $\sigma_{t(r=a)} \approx \sigma_{t(r=b)}$, vậy ứng suất σ_t gần như phân bố đều theo chiều dày của thành ống.

Ứng suất σ_r ở các điểm mép phía trong vẫn bằng $-p$ và ở các điểm mép phía ngoài là bằng không.

b) Khi b tăng lên vô cùng, bề dày δ của ống là rất lớn. Công thức (23-11) tiến đến giới hạn :

$$\left. \begin{aligned}\sigma_r &= -p \cdot \frac{a^2}{r^2} \\ \sigma_t &= p \cdot \frac{a^2}{r^2}\end{aligned} \right\} \quad (23-14)$$

Như vậy ứng suất chính theo hai phương có trị số bằng nhau nhưng ngược dấu nhau. Ta có thể kết luận rằng, ở mọi điểm trạng thái ứng suất là trạng thái trượt thuần túy. Trị số của σ_r và σ_t là tỉ lệ nghịch với bình phương của r . Các trị số đó tiến đến không rất nhanh khi r tăng lên. Ví dụ với $r = 4a$ ứng suất đã giảm mười sáu lần. Biểu đồ biến thiên của σ_r và σ_t được biểu diễn như trên hình (23-6). Như vậy với một ống có tỉ số $\frac{b}{a} > 4$ thì có thể xem là b lớn vô cùng. Điều đó cũng có nghĩa là khi $b > 4a$ thì chu vi bên ngoài dù là tròn hay không tròn, sự phân bố ứng suất là như nhau. Do đó với các chi tiết có lỗ nằm ở vị trí cách thành ngoài quá 4 lần bán kính và trong lỗ chịu áp suất phân bố đều thì ứng suất tại một điểm nào đó được tính như với ống dày có $b = \infty$ (h.23-7).



Hình 23-6

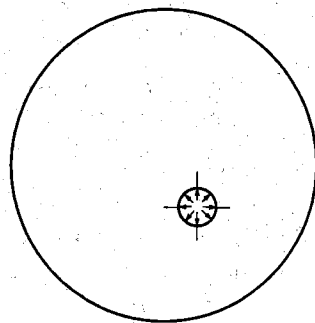
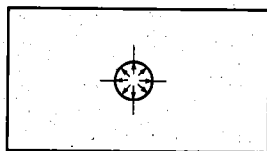
Ta hãy xét điều kiện bền của ống.

Điểm nguy hiểm là điểm ở mép trong. Theo thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất, ứng suất tương đương tại điểm đó là :

$$\sigma_{td} = 2p$$

Điều kiện bền là :

$$\sigma_{td} = 2p \leq [\sigma]$$



Hình 23-7

Biểu thức đó nói rằng : dù ta có tăng chiều dày δ lên vô cùng thì ống cũng chỉ chịu được một áp suất giới hạn là :

$$p = \frac{[\sigma]}{2} \quad (23-15)$$

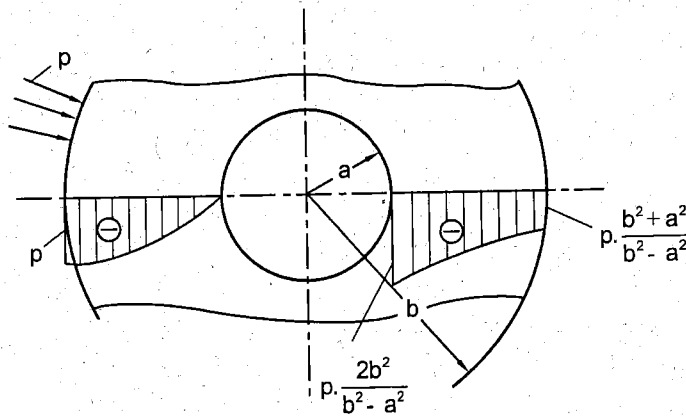
Muốn tạo nên những ống chịu được áp suất lớn hơn thì phải thực hiện phương pháp ghép ống mà sẽ nói đến ở mục sau.

2. Ống chịu áp suất bên ngoài : $p_a = 0, p_b = p$

Công thức của ứng suất và chuyển vị có dạng :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{pb^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \\ \sigma_t &= -\frac{pb^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \\ u &= -\frac{pb^2}{E(b^2 - a^2)} \left[(1 - \mu)r + (1 + \mu) \frac{a^2}{r} \right] \end{aligned} \right\} \quad (23-16)$$

Sự biến thiên của σ_r và σ_t dọc theo bán kính được biểu diễn trên hình 23-8.



Hình 23-8

Để xác định được điểm nguy hiểm ta hãy so sánh ứng suất tương đương ở điểm trên mặt trong và điểm trên mặt ngoài, nghĩa là tại các điểm với $r = a$ và $r = b$.

Với $r = a$, theo thuyết ứng suất tiếp lớn nhất :

$$\sigma_{td} = p \cdot \frac{2b^2}{b^2 - a^2} \quad \left(\sigma_1 = 0; \quad \sigma_3 = -p \cdot \frac{2b^2}{b^2 - a^2} \right)$$

Với $r = b$

$$\sigma_{td} = p \cdot \frac{a^2 + b^2}{b^2 - a^2} \quad \left(\sigma_1 = 0; \quad \sigma_3 = -p \cdot \frac{a^2 + b^2}{b^2 - a^2} \right)$$

Ta thấy điểm mép trong nguy hiểm hơn và cùng có trị số với (23-12).

Nếu lấy $a = 0$ ứng suất tại mọi điểm trong ống là : $\sigma_r = \sigma_t = -p$

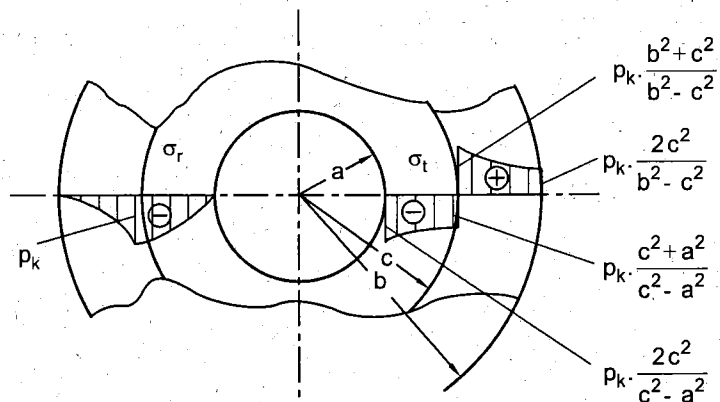
§23-4. ỐNG GHÉP

1. Trường hợp ghép hai ống

Như đã nói ở trên, dù chiều dày của ống tăng lên vô cùng thì áp suất bên trong cũng chỉ có thể đạt đến trị số $\frac{[\sigma]}{2}$. Muốn tăng khả năng chịu lực của ống ta phải thực hiện ghép ống.

Nhìn vào biểu đồ ứng suất (h.23-5) ta thấy phần vật liệu bên trong làm việc nhiều hơn phần vật liệu bên ngoài. Để làm thay đổi sự phân bố ứng suất ta sử dụng hai ống ghép. Ống trong có đường kính ngoài lớn hơn đường kính trong của ống ngoài một ít. Độ chênh lệch của hai bán kính được gọi là độ dôi. Ống ngoài được đốt nóng lên đến một nhiệt độ nhất định để có thể lồng ống trong vào dễ dàng. Sau đó làm nguội đi, ống ngoài sẽ co lại và tạo nên áp suất giữa hai mặt tiếp xúc của các ống. Áp suất đó gây nên một hệ ứng suất trước trong ống ghép. Khi ống chịu một áp suất bên trong p , ứng suất trong thành ống là tổng của hệ ứng suất trước do lắp ghép căng gây nên và ứng suất do p gây nên. Như vậy ta đã thay đổi được sự phân bố của ứng suất, đã giảm bớt ứng suất ở phần vật liệu phía trong và tăng ứng suất ở phần vật liệu phía ngoài. Với phương pháp đó ta nâng được trị số áp suất p .

Giả sử có ống ghép với các kích thước như hình vẽ (h.23-9). Cho độ dôi Δ . Xác định áp suất ghép căng p_k trên các mặt tiếp xúc giữa hai ống.



Hình 23-9

Gọi A là một điểm trên mặt tiếp xúc. Dưới tác dụng của p_k điểm A thuộc về ống trong sẽ có chuyển vị u_1 đi vào tâm. Chuyển vị đó theo quy ước là một số âm. Ngược lại điểm A thuộc về ống ngoài sẽ có chuyển vị u_2 đi ra khỏi tâm. u_2 có trị số dương. Ta phải có điều kiện :

$$u_2 - u_1 = \Delta \quad (23-17)$$

u_1 và u_2 được tính theo các công thức (23-11) và (23-16) như sau :

$$u_1 = -\frac{p_k \cdot c^2}{E(c^2 - a^2)} \left[(1 - \mu)c + (1 + \mu) \frac{a^2}{c} \right]$$

$$u_2 = \frac{p_k \cdot c^2}{E(b^2 - c^2)} \left[(1 - \mu)c + (1 + \mu) \frac{b^2}{c} \right]$$

Thay các biểu thức đó vào (23-17) và rút gọn lại ta được :

$$p_k = \frac{E}{2c^3} \frac{(c^2 - a^2)(b^2 - c^2)}{b^2 - a^2} \Delta \quad (23-18)$$

Biểu đồ biến thiên của ứng suất dọc đường bán kính do p_k gây nên được biểu diễn như hình 23-9.

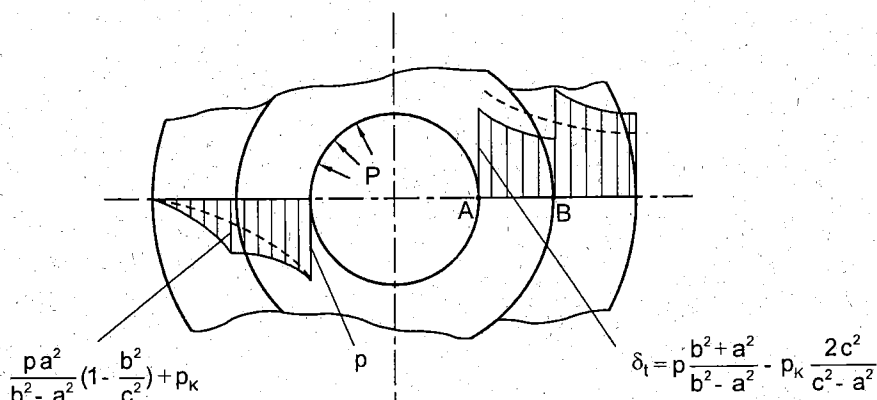
Biểu đồ ứng suất tổng cộng do p_k và áp suất bên trong p gây nên được biểu diễn trên hình 23-10.

Điều mong muốn của ta là khi ống trong đạt đến điều kiện bền thì ống ngoài cũng đạt đến điều kiện bền.

Ta hãy tính ứng suất tương đương theo thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất tại hai điểm A và B ở các mép trong của ống.

Tại B ta có :

$$\sigma_{td} = p \cdot \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} - p_k \frac{2c^2}{c^2 - a^2} + p$$



Hình 23-10

Tại A ta có :

$$\sigma_{td} = \frac{p \cdot a^2}{c^2} \left(1 + \frac{b^2}{c^2} \right) + p_k \frac{b^2 + c^2}{b^2 - c^2} - \frac{p \cdot a^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{c^2} \right) - (-p_k)$$

Để hai ống có cùng độ bền như nhau thì ứng suất tương đương tại A phải bằng ứng suất tương đương tại B. Sau khi rút gọn ta có phương trình :

$$p \cdot \frac{b^2}{c^2} \cdot \frac{c^2 - a^2}{b^2 - a^2} = p_k \left(\frac{b^2}{b^2 - c^2} + \frac{c^2}{c^2 - a^2} \right) \quad (23-19)$$

Thay trị số p_k được tính từ (23-18) vào đây, ta tìm thấy trị số độ dôi cần thiết là :

$$\Delta = \frac{2p}{E} \cdot \frac{cb^2(c^2 - a^2)}{b^2(c^2 - a^2) + c^2(b^2 - c^2)} \quad (23-20)$$

Từ (23-20) và biểu thức ứng suất tương đương tại A hoặc B ta có :

$$\sigma_{td} = p \cdot \frac{2b^2}{b^2 - a^2} \left[1 - \frac{1}{\frac{b^2}{b^2 - c^2} + \frac{c^2}{c^2 - a^2}} \right] \quad (23-21)$$

Khi a và b là trị số đã cho, có thể chọn c để đạt được điều kiện tối ưu, nghĩa là có trị số σ_{td} nhỏ nhất.

Tính đạo hàm liên tiếp của σ_{td} đối với c, ta có thể chứng minh được rằng σ_{td} sẽ đạt đến cực tiểu khi :

$$c = \sqrt{a \cdot b} \quad (23-22)$$

Thay trị số đó vào (23-20) và (23-21) ta có công thức của độ dôi và σ_{td} tương ứng :

$$\Delta = \frac{p}{E} \sqrt{ab} \quad (23-23)$$

$$\sigma_{td}^{\min} = p \cdot \frac{b}{b - a} \quad (23-24)$$

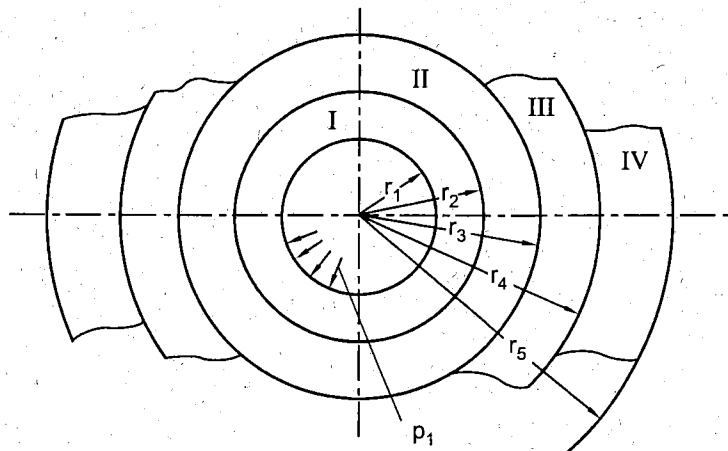
Công thức (23-22) được gọi là điều kiện của Gadôlin. So sánh (23-24) và (23-12) ta có :

$$\frac{\sigma_{td}^{\min}}{\sigma_{td}} = \frac{b + a}{2b} \quad (23-25)$$

Nếu bán kính a là nhỏ so với b thì điều kiện Gadôlin cho phép giảm σ_{td} xuống gần hai lần. Nhưng nếu $a \approx b$ thì ống ghép không dẫn đến một hiệu quả nào.

2. Trường hợp ghép nhiều ống. Công thức của Trần Văn Thông

Giả sử ta có ống ghép bốn lớp với các kích thước r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 như hình 23-11. r_1, r_2, r_3, r_4 là bán kính trong của các ống I, II, III, IV ; r_5 là bán kính ngoài của ống thứ IV.



Hình 23-11

Ta xem rằng các ống có độ bền đều. Nghĩa là dưới tác dụng của áp suất bên trong và của các độ dôi, các ống đạt đến điều kiện bền cùng một lúc, tức là ứng suất tương đương tại các điểm nguy hiểm của các ống đều đạt đến ứng suất cho phép $[\sigma]$. Ta kí hiệu p_1 là áp suất bên trong của ống ghép và p_i hay p_j là

áp suất trên các mặt tiếp xúc tương ứng với r_i và r_j do độ dôi giữa các lớp ghép và do p_1 gây nên.

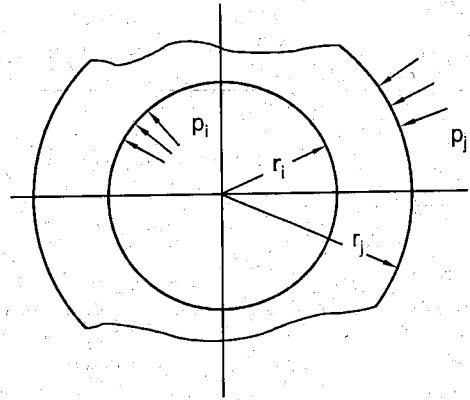
Vấn đề đặt ra là hãy tìm :

– Trị số áp suất cho phép $[p_1]$ mà ống có thể chịu được

– Các độ dôi ở các lớp ghép.

a) Tính $[p_1]$

Xem áp suất ở ngoài cùng của ống ghép là bằng không. Xét một ống bất kỳ nào đó với bán kính bên trong là r_i và bán kính bên ngoài là r_j . Các áp suất tương ứng là p_i và p_j (h.23–12). Điểm nguy hiểm của ống luôn luôn là điểm ở mép trong. Xác định trạng thái ứng suất của phần tử. Từ công thức của Lamê (23–9) ta có :



Hình 23–12

$$\sigma_r = -p_i$$

$$\sigma_t = \frac{p_i r_i^2 - p_j r_j^2}{r_j^2 - r_i^2} - \frac{r_i^2 \cdot r_j^2 (p_j - p_i)}{(r_j^2 - r_i^2) r_i^2}$$

Có thể viết lại dưới dạng :

$$\sigma_t = \frac{p_i r_i^2 - 2p_j r_j^2 + p_i r_j^2}{r_j^2 - r_i^2}$$

Vậy ứng suất tương đương theo thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất là :

$$\sigma_{td} = \sigma_t - \sigma_r = \frac{2(p_i - p_j) r_j^2}{r_j^2 - r_i^2} \quad (23-26)$$

Áp dụng công thức đó cho ống ngoài ta cũng có : $\sigma_{td} = \frac{2p_4 r_5^2}{r_5^2 - r_4^2} = [\sigma]$

Vậy trị số của p_4 là : $p_4 = \left[1 - \frac{r_4^2}{r_5^2} \right] \frac{[\sigma]}{2}$

Với ống thứ hai ta có :

$$\sigma_{td} = \frac{2(p_3 - p_4) r_4^2}{r_4^2 - r_3^2} = [\sigma]$$

Do đó :

$$p_3 = \left(1 - \frac{r_3^2}{r_4^2} \right) \frac{[\sigma]}{2} + p_4$$

Hay :

$$p_3 = \left(2 - \frac{r_3^2}{r_4^2} - \frac{r_4^2}{r_5^2} \right) \frac{[\sigma]}{2} \quad (23-27)$$

Ta có thể viết tiếp cho p_2 như sau :

$$p_2 = \left(1 - \frac{r_2^2}{r_3^2}\right) \frac{[\sigma]}{2} + p_3$$

Hay :

$$p_2 = \left(3 - \frac{r_2^2}{r_3^2} - \frac{r_3^2}{r_4^2} - \frac{r_4^2}{r_5^2}\right) \frac{[\sigma]}{2}$$

Ta có thể đưa ra công thức tổng quát dưới dạng :

$$p_n = \left(1 - \frac{r_n^2}{r_{n+1}^2}\right) \frac{[\sigma]}{2} + p_{n+1} \quad (23-28)$$

Vậy trị số của áp suất cho phép bên trong ống ghép bốn lớp là :

$$[p_1] = \left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2}\right) \frac{[\sigma]}{2} + p_2$$

Hay :

$$[p_1] = \left[4 - \frac{r_1^2}{r_2^2} - \frac{r_2^2}{r_3^2} - \frac{r_3^2}{r_4^2} - \frac{r_4^2}{r_5^2}\right] \frac{[\sigma]}{2}$$

Một cách tổng quát với n lớp ta có thể viết :

$$[p_1] = \left[n - \frac{r_1^2}{r_2^2} - \frac{r_2^2}{r_3^2} - \dots - \frac{r_{n-1}^2}{r_n^2} - \frac{r_n^2}{r_{n+1}^2}\right] \cdot \frac{[\sigma]}{2} \quad (23-29)$$

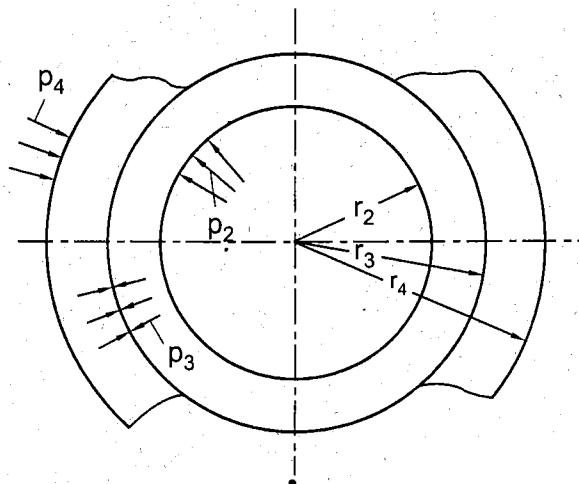
b) Tính độ dôi giữa các lớp ghép

Xét hai lớp liên tiếp bất kì. Ví dụ lớp thứ hai và lớp thứ ba (h.23-13). Ta có các áp suất tiếp xúc trên các mặt là p_2 , p_3 và p_4 . Như đã nói, các áp suất đó vừa do độ dôi trên các mặt, vừa do $[p_1]$ gây nên. Vậy độ dôi giữa hai lớp này là do p_2 , p_3 và p_4 quyết định. Ảnh hưởng của độ dôi đó đối với các lớp cũng như ảnh hưởng của các độ dôi ở các lớp khác và áp suất bên trong đối với nó thể hiện qua p_2 , p_3 và p_4 .

Gọi u_2 và u_3 là chuyển vị hướng kính tại các điểm trên mặt ghép do p_2 , p_3 và p_4 gây nên, ta phải có điều kiện :

$$u_3 - u_2 = \Delta_{23} \quad (23-30)$$

trong đó Δ_{23} là độ dôi giữa hai lớp II và III.



Hình 23-13

Từ công thức (23-10) ta có :

$$u_2 = \frac{1-\mu}{E} \cdot \frac{p_2 r_2^2 - p_3 r_3^2}{r_3^2 - r_2^2} \cdot r_3 - \frac{1+\mu}{E} \cdot \frac{r_2^2 r_3^2 (p_3 - p_2)}{(r_3^2 - r_2^2) r_3}$$

$$u_3 = \frac{1-\mu}{E} \cdot \frac{p_3 r_3^2 - p_4 r_4^2}{r_4^2 - r_3^2} \cdot r_3 - \frac{1+\mu}{E} \cdot \frac{r_3^2 r_4^2 (p_4 - p_3)}{(r_4^2 - r_3^2) r_3}$$

Thay các trị số đó vào (23-30) ta tìm thấy trị số của độ dôi Δ_{23} như sau :

$$\Delta_{23} = \frac{1-\mu}{E} r_3 \left[\frac{p_3 \varepsilon_3^2 - p_4}{1 - \varepsilon_3^2} - \frac{p_2 \varepsilon_2^2 - p_3}{1 - \varepsilon_2^2} \right] - \frac{1+\mu}{E r_3} \left[\frac{r_3^2 (p_4 - p_3)}{1 - \varepsilon_3^2} + \frac{r_2^2 (p_3 - p_2)}{1 - \varepsilon_2^2} \right] \quad (23-31)$$

Trong đó : $\varepsilon_3 = \frac{r_3}{r_4}$, $\varepsilon_2 = \frac{r_2}{r_3}$

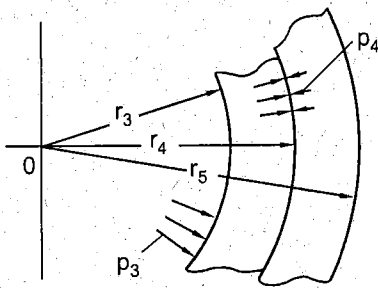
Tương tự ta có thể viết tiếp các trị số của các độ dôi trên các mặt ghép khác như sau :

$$\Delta_{12} = \frac{1-\mu}{E} r_2 \left[\frac{p_2 \varepsilon_2^2 - p_3}{1 - \varepsilon_2^2} - \frac{p_1 \varepsilon_1^2 - p_2}{1 - \varepsilon_1^2} \right] - \frac{1+\mu}{E r_2} \left[\frac{r_2^2 (p_3 - p_2)}{1 - \varepsilon_2^2} + \frac{r_1^2 (p_2 - p_1)}{1 - \varepsilon_1^2} \right] \quad (23-32)$$

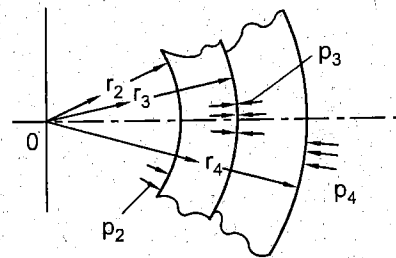
$$\Delta_{34} = \frac{1-\mu}{E} r_4 \left[p_4 \varepsilon_4^2 - \frac{p_3 \varepsilon_3^2 - p_4}{1 - \varepsilon_3^2} \right] - \frac{1+\mu}{E r_4} \left[\frac{r_3^2 (p_4 - p_3)}{1 - \varepsilon_3^2} - \frac{r_4^2 p_4}{1 - \varepsilon_4^2} \right] \quad (23-33)$$

(h.23-14) và (h.23-15).

Với các trị số p_1, p_2, p_3, p_4 đã được xác định, ta dễ dàng tính các độ dôi đó.



Hình 23-14



Hình 23-15

c) Chuỗi kích thước hợp lý

Giả sử các bán kính r_1 và r_5 của ống ghép bốn lớp trên đây là đã cho, ta phải chọn r_2, r_3 và r_4 sao cho $[p_1]$ đạt trị số lớn nhất.

Từ biểu thức (23-29) ta có :

$$[p_1] = \left[4 - \frac{r_1^2}{r_2^2} - \frac{r_2^2}{r_3^2} - \frac{r_3^2}{r_4^2} - \frac{r_4^2}{r_5^2} \right] \frac{[\sigma]}{2} \quad (23-34)$$

$[p_1]$ đạt giá trị lớn nhất khi biểu thức :

$$\left[\frac{r_1^2}{r_2^2} + \frac{r_2^2}{r_3^2} + \frac{r_3^2}{r_4^2} + \frac{r_4^2}{r_5^2} \right] \quad (23-35)$$

đạt đến giá trị nhỏ nhất.

Áp dụng biểu thức Cauchy cho bốn số không âm $\frac{r_1^2}{r_2^2}, \frac{r_2^2}{r_3^2}, \frac{r_3^2}{r_4^2}, \frac{r_4^2}{r_5^2}$ ta có :

$$\frac{r_1^2}{r_2^2} + \frac{r_2^2}{r_3^2} + \frac{r_3^2}{r_4^2} + \frac{r_4^2}{r_5^2} \geq 4 \cdot 4 \sqrt{\frac{r_1^2}{r_5^2}} \quad (23-36)$$

Vì r_1 và r_5 là những số cho trước, do đó $4 \cdot 4 \sqrt{\frac{r_1^2}{r_5^2}}$ là không đổi, vậy dấu bằng xảy ra khi :

$\frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{r_2^2}{r_3^2} = \frac{r_3^2}{r_4^2} = \frac{r_4^2}{r_5^2}$. Vì r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 đều là số dương. Giải hệ ba phương trình đó tìm thấy :

$$\begin{cases} r_2 = \sqrt{r_1 r_3} \\ r_3 = \sqrt{r_2 r_4} \\ r_4 = \sqrt{r_3 r_5} \end{cases}$$

Thay (23-36) vào (23-34) ta có :

$$[p] = 4 \left(1 - 4 \sqrt{\frac{r_1}{r_5}} \right) \frac{[\sigma]}{2} \quad (23-37)$$

Công thức (23-37) là công thức của Trần Văn Thông.

Áp dụng cho ống hai lớp lại tìm thấy điều kiện của Gadôlin. Ví dụ với hai lớp ngoài cùng, có tương quan giữa $r_3 r_4 r_5$ như sau : $r_4 = \sqrt{r_3 r_5}$

Ta có nhận xét sau đây :

Khi các bán kính r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 xấp xỉ bằng nhau thì $[p_1]$ được tính từ (23-29) tiến tới không. Ống ghép lúc đó là vô nghĩa, ngược lại nếu r_2, r_3, r_4 và r_5 tiến tới vô cùng thì $[p_1]$ có giới hạn là : $[p_1] = \frac{[\sigma]}{2}$ và như vậy ống ghép cũng trở nên vô nghĩa.

Ví dụ 1. Chọn đường kính 2c và 2b cho nòng súng có cấu tạo bởi ống ghép hai lớp với bán kính bên trong là $a = 50\text{mm}$. Tính độ dôi Δ cần thiết để lắp ghép. Cho biết áp suất lớn nhất khi bắn là $p_{\max} = 20\text{kN/cm}^2$. Vật liệu bằng thép với $E = 2 \cdot 10^7 \text{N/cm}^2$. Giới hạn chảy của vật liệu là $\sigma_{ch} = 60\text{kN/cm}^2$. Hệ số an toàn $n > 2$.

Bài giải

Từ biểu thức (23–24) ta có :

$$\sigma_{td}^{min} = 20000 \frac{b}{b-a} = \frac{60000}{2}$$

Vậy $b = 3a$

Bán kính ngoài của ống trong là : $c = \sqrt{ab} = a\sqrt{3}$

Thay số vào ta có : $2a = 100\text{mm}$, $2b = 300\text{mm}$, $3c = 173\text{mm}$

Độ dôi được tính với công thức (23–23) : $\Delta = \frac{20000}{2 \cdot 10^7} \sqrt{50 \cdot 150} = 0,08\text{mm}$

Ví dụ 2. Một thanh thép được lắp ghép căng vào một tấm thép như trên hình 23–16. Hỏi cần một lực là bao nhiêu để kéo thanh ra khỏi tấm thép. Cho biết độ dôi $\Delta = 0,03\text{mm}$. Đường kính của thanh $D = 60\text{mm}$. Chiều dài của tấm $h = 100\text{mm}$. Hệ số ma sát giữa tấm và thanh là $f = 0,25$.

Bài giải

Ta bỏ qua sự không đều của độ dôi dọc theo chiều dày của tấm. Lực kéo thanh ra khỏi tấm là :

$$P = f \cdot p_k \cdot \pi \cdot D \cdot h$$

Trong đó p_k là áp suất ghép căng. Trong trường hợp đang xét ta có thể xem rằng $a = 0$, $b = \infty$ và $c = \frac{D}{2}$.

Do đó p_k được tính với công thức :

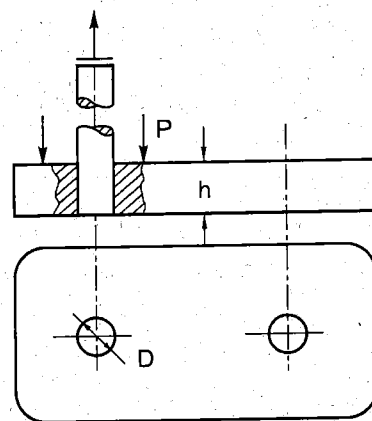
$$p_k = E \cdot \frac{\Delta}{D} = 2 \cdot 10^7 \cdot \frac{0,03}{60} = 10000 \text{ N/cm}^2$$

Trị số lực cần thiết là :

$$P = 0,25 \cdot 10000 \pi \cdot 6 \cdot 10 = 471000\text{N}$$

Ví dụ 3. Ta lấy lại ví dụ 1 và giả thiết ghép căng ba ống. Bán kính bên trong $r_1 = 50\text{mm}$, bán kính bên ngoài $r_4 = 150\text{mm}$. Ứng suất cho phép của vật liệu $[\sigma] = 30000 \text{ N/cm}^2$. Vật liệu bằng thép với $F = 2 \cdot 10^7 \text{ N/cm}^2$, $\mu = 0,28$.

- Tính áp suất lớn nhất mà ống có thể đạt được.
- Xác định các bán kính hợp lý r_2 , r_3 tương ứng.
- Xác định độ dôi tương ứng.



Hình 23–16

Bài giải

Trị số áp suất lớn nhất được tính theo công thức (23–29)

$$[p_1] = \left[3 - \frac{r_1^2}{r_2^2} - \frac{r_2^2}{r_3^2} - \frac{r_3^2}{r_4^2} \right] \frac{[\sigma]}{2} \quad (1)$$

Trong đó r_2 và r_3 được xác định bởi các tương quan sau đây :

$$r_3 = \sqrt{r_4 r_2}, r_2 = \sqrt{r_3 r_1} \quad (2)$$

Giải hệ phương trình (2) ta được :

$$r_3 = \sqrt[3]{r_4^2 r_1} = \sqrt[3]{150^2 \cdot 50} = 104 \text{ mm};$$

$$r_2 = \sqrt{r_3 r_1} = \sqrt{104 \cdot 50} = 72 \text{ mm}$$

Từ đó ta có các bình phương của các tỉ số giữa các bán kính là :

$$\varepsilon_1^2 = \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 = 0,4822; \quad \varepsilon_2^2 = \left(\frac{r_2}{r_3} \right)^2 = 0,4792; \quad \varepsilon_3^2 = \left(\frac{r_3}{r_4} \right)^2 = 0,4807$$

Vậy thay vào (1) ta có :

$$[p_1] = [3 - 0,4822 - 0,4792 - 0,4807] \frac{30000}{2}$$

$$[p_1] = 23368 \text{ N/cm}^2$$

So sánh với ví dụ 1 thấy $p_{\max} < [p_1]$

Ta tính các độ dôi tương ứng :

Trước hết phải tính các áp suất ghép căng p_2 và p_3 tương ứng với r_2 và r_3 . Từ công thức (23–28) có :

$$p_3 = \left(1 - \frac{r_3^2}{r_4^2} \right) \frac{[\sigma]}{2} = (1 - 0,4807) \frac{30000}{2}$$

$$p_3 = 7789 \text{ N/cm}^2$$

$$p_2 = \left(1 - \frac{r_2^2}{r_3^2} \right) \frac{[\sigma]}{2} + p_3 = (1 - 0,4792) \frac{30000}{2} + 7789$$

$$p_2 = 15601 \text{ N/cm}^2$$

Các độ dôi có trị số là :

$$\Delta_{23} = \frac{1 - \mu}{E} r_3 \left[\frac{p_3 \varepsilon_3^2}{1 - \varepsilon_3^2} - \frac{p_2 \varepsilon_2^2}{1 - \varepsilon_2^2} \right] - \frac{1 + \mu}{E r_3} \left[\frac{r_3^2 p_3}{1 - \varepsilon_3^2} + \frac{r_2^2 (p_3 - p_2)}{1 - \varepsilon_2^2} \right]$$

$$\Delta_{12} = \frac{1-\mu}{E} r_2 \left[\frac{p_2 \varepsilon_2^2}{1-\varepsilon_2^2} - \frac{p_1 \varepsilon_1^2}{1-\varepsilon_1^2} \right] - \frac{1-\mu}{E r_2} \left[\frac{r_2^2 (p_3 - p_2)}{1-\varepsilon_2^2} + \frac{r_1^2 (p_3 - p_2)}{1-\varepsilon_1^2} \right]$$

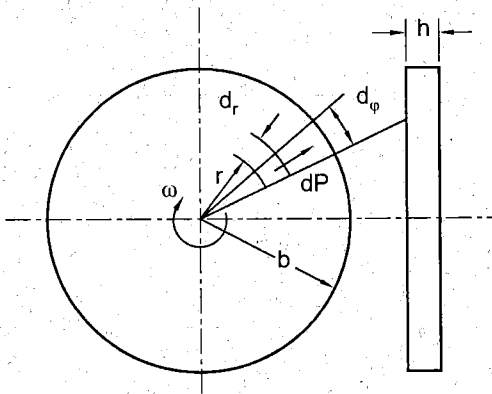
Sau khi thay số ta tìm thấy : $\Delta_{23} = 0,175\text{mm}$; $\Delta_{12} = 0,121\text{mm}$.

§23-5. ĐĨA CÓ ĐỘ DÀY ĐỀU QUAY VỚI VẬN TỐC CAO

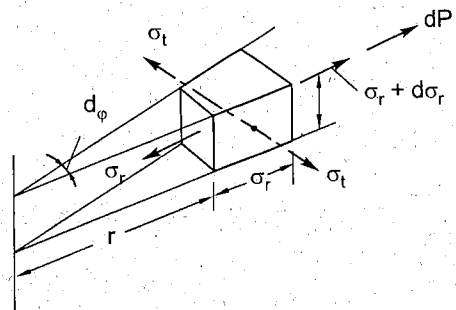
Khảo sát đĩa có chiều dày h quay tròn với vận tốc góc không đổi ω (h.23-17). Tách ra khỏi đĩa phân tố vô cùng bé $h r d\varphi . dr$ (h.23-18), lực quán tính li tâm của phân tố là :

$$dP = \frac{\gamma h}{g} \omega^2 . r^2 . d\varphi . dr$$

Trong đó γ là trọng lượng riêng của vật liệu. $\overrightarrow{dP}$ có chiều ngược với gia tốc hướng tâm.



Hình 23-17



Hình 23-18

Bài toán có tính chất đối xứng do đó trên các mặt của phân tố chỉ có ứng suất pháp mà không có ứng suất tiếp (h.23-18).

Phương trình cân bằng được viết như sau :

$$(\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr)h d\varphi - \sigma_r . r . h . d\varphi - \sigma_t h dr d\varphi + \frac{\gamma}{g} h \omega^2 r^2 d\varphi dr = 0$$

Sau khi rút gọn ta có :

$$\frac{d}{dr}(\sigma_r . r) - \sigma_t = -\frac{\gamma}{g} \omega^2 r^2 \quad (23-38)$$

Ở đây vì có lực quán tính nên không thể sử dụng giả thuyết $\varepsilon_z = \text{const}$. Bài toán phải giải quyết một cách tổng quát hơn. Chọn chuyển vị u làm ẩn số ban đầu. Từ các biểu thức :

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \varepsilon_t = \frac{u}{r}; \varepsilon_r = \frac{1}{E} [\sigma_r - \mu \sigma_t]; \varepsilon_t = \frac{1}{E} [\sigma_t - \mu \sigma_r]$$

Ta tìm thấy tương quan giữa ứng suất và chuyển vị như sau :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{du}{dr} + \mu \frac{u}{r} \right) \\ \sigma_t &= \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{u}{r} + \mu \frac{du}{dr} \right) \end{aligned} \right\} \quad (23-39)$$

Sau khi thay (23-39) vào (23-38) ta được phương trình vi phân :

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = -\frac{1-\mu^2}{E} \frac{\gamma \omega^2}{g} r$$

Có thể viết lại dưới dạng :

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (ur) \right] = -\frac{1-\mu^2}{E} \cdot \frac{\gamma \omega^2}{g} r \quad (23-40)$$

Sau khi lấy tích phân ta tìm thấy :

$$u = -\frac{1-\mu^2}{E} \cdot \frac{\gamma \omega^2}{g} \cdot \frac{r^3}{8} + c_1 r + \frac{c_2}{r} \quad (23-41)$$

Thay u vào (23-39) ta có các biểu thức của ứng suất như sau :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\mu^2} \left[C_1(1+\mu) - C_2(1-\mu) \frac{1}{r^2} \right] - \frac{\gamma \omega^2}{8g} (3+\mu) r^2 \\ \sigma_t &= \frac{E}{1-\mu^2} \left[C_1(1+\mu) + C_2(1-\mu) \frac{1}{r^2} \right] - \frac{\gamma \omega^2}{8g} (1+3\mu) r^2 \end{aligned} \right\} \quad (23-42)$$

Trong đó C_1 và C_2 là các hằng số tích phân được xác định từ các điều kiện biên của bài toán như sau :

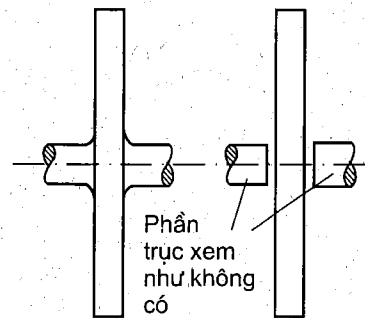
1. Khi $r = b$, $\sigma_r = 0$
2. Điều kiện biên thứ hai phụ thuộc vào cách liên kết giữa đĩa và trục (h.23-19).

Nếu đĩa và trục được đúc liền, khi đó C_2 phải bằng không, vì nếu không thì với $r = 0$ chuyển vị u sẽ trở nên vô cùng lớn và điều đó không đúng với thực tế. Như vậy ta chỉ còn một hằng số C_1 . Từ điều kiện $\sigma_r = 0$ tại biên ngoài ta có :

$$C_1 = \frac{1-\mu^2}{E} \cdot \frac{\gamma \omega^2}{8g} \cdot b^2 \cdot \frac{3+\mu}{1+\mu} \quad (23-43)$$

Trị số của ứng suất σ_r và σ_t là :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\gamma \omega^2}{8g} (3+\mu)(b^2 - r^2) \\ \sigma_t &= \frac{\gamma \omega^2}{8g} (3+\mu) \left(b^2 - \frac{1+3\mu}{3+\mu} r^2 \right) \end{aligned} \right\} \quad (23-44)$$



Hình 23-19

Biểu đồ biến thiên của trị số các ứng suất này được biểu diễn trên hình 23–20.

Nếu đĩa được lắp vào trục qua một lỗ thông (h.23–21) thì ta phải xem ứng suất tại mặt trong ($r = a$) là bằng không. Các hằng số C_1 và C_2 được xác định từ hệ phương trình :

$$\frac{E}{1 - \mu^2} \left[C_1(1 + \mu) - C_2(1 - \mu) \frac{1}{b^2} \right] - \frac{\gamma \omega^2}{8g} (3 + \mu) b^2 = 0$$

$$\frac{E}{1 - \mu^2} \left[C_1(1 + \mu) - C_2(1 - \mu) \frac{1}{a^2} \right] - \frac{\gamma \omega^2}{8g} (3 + \mu) b^2 = 0$$

Từ đó ta có :

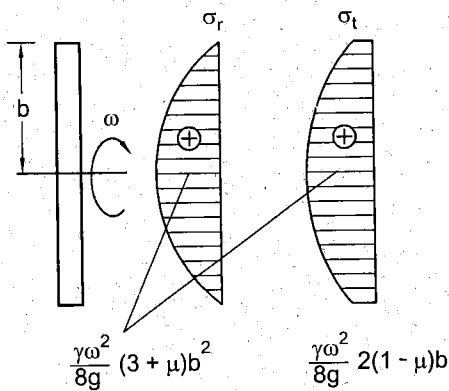
$$C_1(1 + \mu) = \frac{1 - \mu^2}{E} \cdot \frac{\gamma \omega^2}{8g} \cdot (3 + \mu)(b^2 + a^2)$$

$$C_2(1 - \mu) = \frac{1 - \mu^2}{E} \cdot \frac{\gamma \omega^2}{8g} \cdot (3 + \mu) a^2 b^2$$

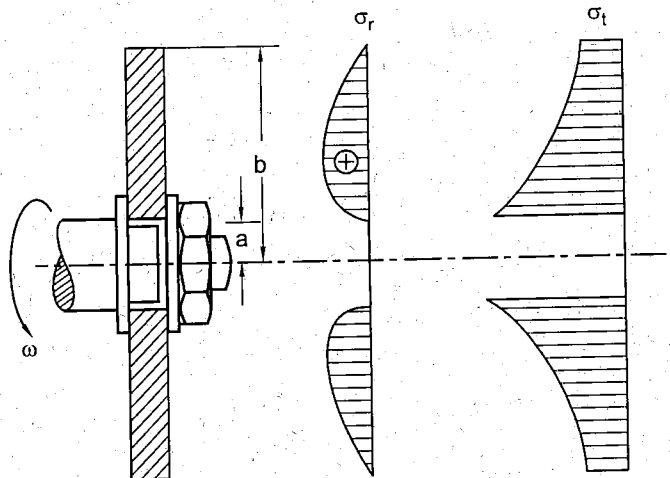
Vậy các ứng suất có trị số là :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\gamma \omega^2}{8g} (3 + \mu) \left(b^2 + a^2 - \frac{a^2 b^2}{r^2} - r^2 \right) \\ \sigma_t &= \frac{\gamma \omega^2}{8g} (3 + \mu) \left(b^2 + a^2 + \frac{a^2 b^2}{r^2} - \frac{1 + 3\mu}{3 + \mu} r^2 \right) \end{aligned} \right\} \quad (23-45)$$

Biểu đồ ứng suất được biểu diễn như trên hình (23–21).



Hình 23–20



Hình 23–21

§24-1. KHÁI NIỆM

Vỏ là vật thể có kích thước theo một phương rất bé so với hai phương kia. Kích thước bé đó được gọi là chiều dày của vỏ. Quỹ tích các điểm cách đều hai mặt giới hạn của vỏ được gọi là mặt trung gian. Nếu mặt trung gian là một mặt phẳng thì ta gọi là tấm. Tùy theo hình dạng của mặt trung gian mà ta gọi là tấm tròn, tấm chữ nhật, tấm hình thang v.v...

Trong chương này ta chỉ chú trọng đến vỏ tròn xoay.

Nếu mặt trung gian của vỏ là một phần của mặt cầu, hình chóp, hình trụ v.v... thì gọi là vỏ cầu, vỏ chóp, vỏ trụ... Ta cũng chỉ chú ý đến các loại vỏ có chiều dày không đổi.

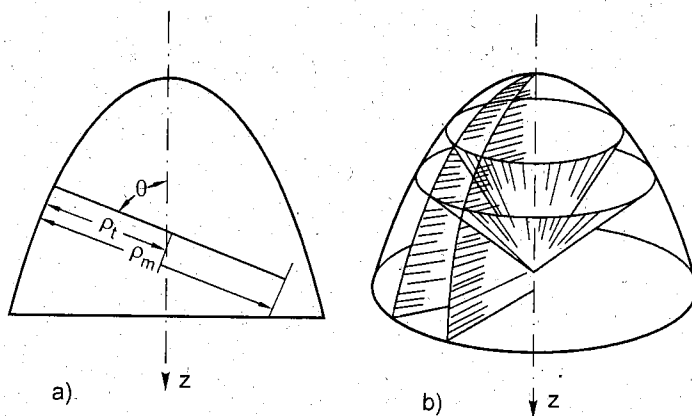
§24-2. VỎ MỎNG TRÒN XOAY

Ta gọi vỏ mỏng tròn xoay là khi mặt trung gian của vỏ có một trục đối xứng. Vì δ nhỏ nên có thể xem ứng suất pháp phân bố đều dọc theo chiều dày của vỏ. Điều đó cũng có nghĩa là đã bỏ qua ảnh hưởng của thành phần mômen uốn. Cách tính toán đó được gọi là lý thuyết không mômen.

Ở những vùng vỏ chịu tác dụng của lực tập trung, hoặc có vành đai tăng cường, hoặc biên chịu ngàm, hay có sự thay đổi đột ngột về độ cong, ứng suất do mômen uốn gây nên là rất đáng kể. Song ảnh hưởng của mômen uốn chỉ nằm trong một phạm vi rất hẹp. Ở xa các vùng đó ảnh hưởng của mômen uốn là rất bé có thể bỏ qua được.

Khi δ càng nhỏ thì lý thuyết không mômen càng đúng, càng gần với thực tế. Ở đây chỉ xét đến trường hợp áp suất tác động lên vỏ có tính chất đối xứng, nghĩa là trục đối xứng của vỏ cũng là trục đối xứng của tải trọng.

Xét vỏ mỏng tròn xoay chịu áp suất phân bố đều bên trong như hình 24-1.



Hình 24 - 1

Gọi ρ_m là bán kính cong của đường kinh tuyến và ρ_t là bán kính cong của đường vĩ tuyến tại một điểm nào đó trên mặt phẳng trung gian của vỏ mỏng. Các bán kính đó là các

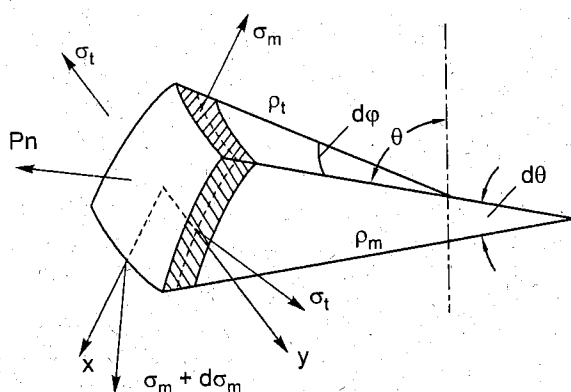
bán kính chính của mặt cong. Chúng nằm trên đường pháp tuyến của mặt cong tại điểm đang xét. Gọi θ là góc làm bởi pháp tuyến này với trục đối xứng của vỏ, ρ_m và ρ_t là những hàm số đối với θ . ρ_t là đoạn đường sinh của mặt nón giới hạn bởi đáy là đường tròn vĩ tuyến và đỉnh là giao điểm của pháp tuyến với trục đối xứng của vỏ. ρ_m là bán kính cong của đường kinh tuyến tại điểm đang xét. ρ_m và ρ_t cùng được xác định trên pháp tuyến chung nhưng rõ ràng tâm cong của đường kinh tuyến không nằm trên trục đối xứng của mặt (h.24-1a).

Tách ra khỏi vỏ một phân tố bởi các mặt sau đây :

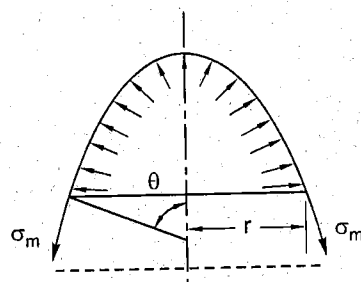
– Hai mặt cắt là hai mặt nón đi qua hai đường vĩ tuyến rất gần nhau. Chúng có các đường sinh tạo với nhau một góc $d\theta$.

– Hai mặt kinh tuyến tạo với nhau một góc $d\varphi$.

Phân tố được biểu diễn như trên hình 24-2.



Hình 24-2



Hình 24-3

Vì lí do đối xứng nên các góc vuông luôn luôn được bảo tồn trong quá trình vỏ biến dạng và vì vậy trên các mặt cắt không có ứng suất tiếp, chỉ có các ứng suất pháp σ_m , σ_t theo phương kinh tuyến và vĩ tuyến.

Chiếu tất cả các lực lên phương pháp tuyến của phân tố ta có phương trình cân bằng như sau :

$$p \cdot \rho_m \rho_t d\theta d\varphi - 2\sigma_m \delta \rho_t d\varphi \sin \frac{d\theta}{2} - 2\sigma_t \delta \cdot \rho_m d\theta \cdot \sin \frac{d\varphi}{2} = 0$$

Vì $d\theta$ và $d\varphi$ là rất bé nên có thể xem $\sin \frac{d\theta}{2} \approx \frac{d\theta}{2}$, $\sin \frac{d\varphi}{2} = \frac{d\varphi}{2}$. Sau khi rút gọn và chia cả hai vế cho $\rho_m \cdot \rho_t \cdot \delta$ ta được phương trình :

$$\frac{\sigma_m}{\rho_m} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{p}{\delta} \quad (24-1)$$

Phương trình đó được gọi là phương trình Laplace.

Để thiết lập phương trình thứ hai, chúng ta xét sự cân bằng của một phần vỏ. Ví dụ cắt vỏ theo một mặt nón có đường sinh tạo với trục một góc θ (h.24-3). Gọi P là thành phần hợp lực của tải trọng trên phương của trục vỏ. Phương trình hình chiếu của các lực lên phương đó là :

$$\sigma_m \cdot 2\pi \cdot r \cdot \delta \cdot \sin\theta = P$$

Trong đó r là bán kính của đường tròn đáy của hình nón.

Hệ hai phương trình (24-1) và (24-2) cho phép xác định được σ_m và σ_t . Ứng suất chính thứ ba là ứng suất ép giữa các lớp song song với thành vỏ. Ứng suất đó có thể bỏ qua so với σ_m và σ_t . Thực vậy, ví dụ với điểm trong cùng, ứng suất đó là lớn nhất và bằng p , trong khi đó σ_m và σ_t có trị số vào cỡ $p \frac{\rho_m}{\delta}$ và $p \frac{\rho_t}{\delta}$, mà ρ_t và ρ_m là rất lớn so với δ , vậy trạng thái ứng suất có thể xem là trạng thái ứng suất phẳng.

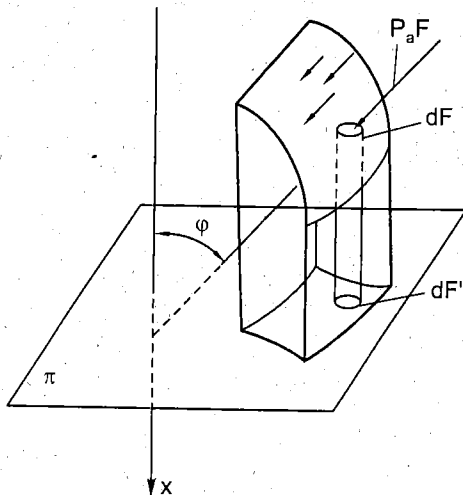
Trong quá trình tính toán ta thường phải sử dụng định lý về hình chiếu sau đây :

Định lý 1 : Nếu trên một mặt nào đó chịu tác dụng của một hệ áp suất p phân bố đều thì dù hình dạng của mặt đó như thế nào, thành phần hình chiếu của áp lực trên một phương nào đó sẽ là tích của áp suất với hình chiếu của mặt đó lên mặt phẳng vuông góc với phương chiếu.

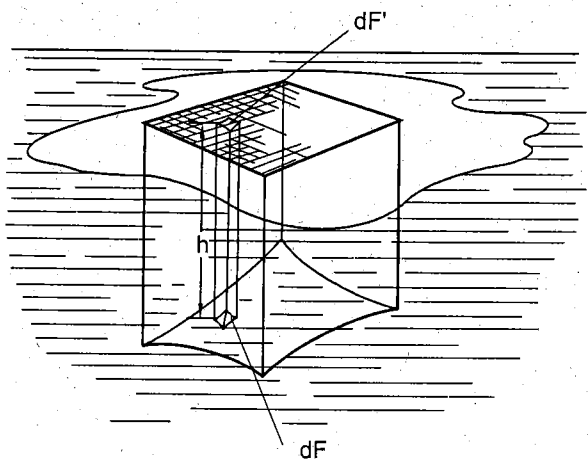
Giả sử mặt F đã cho (h.24-4) trên đó ta có hệ áp suất phân bố đều p . Ta phải tìm thành phần hình chiếu của áp lực P trên phương trục x . Thành phần đó được tính với biểu thức tích phân :

$$P_x = \int_F p \cos\varphi dF$$

φ – góc gồm giữa pháp tuyến của dF và trục x .



Hình 24-4



Hình 24-5

Hình chiếu diện tích dF trên mặt π vuông góc với trục x và bằng :

$$dF' = dF \cos\varphi$$

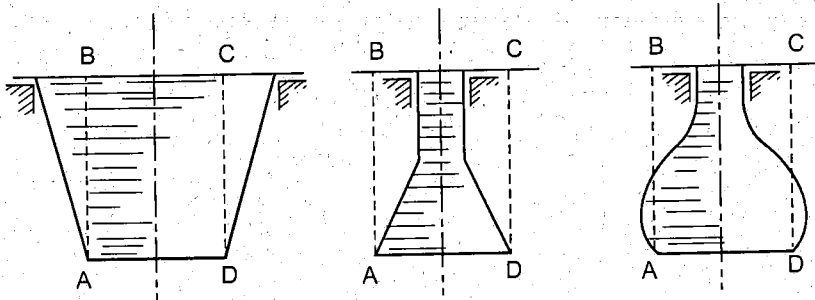
Do đó ta có thể viết lại : $P_x = p \int_F dF' = p.F'$

F' là hình chiếu của F trên π .

Định lí thứ hai thường gặp là định lí về áp suất của chất lỏng.

Định lí 2 : Nếu trên một mặt nào đó chịu tác dụng áp suất của chất lỏng (h.24-5) thì thành phần áp lực thẳng đứng là bằng trọng lượng của cả thể tích cột chất lỏng đặt trên diện tích đó.

Trên các hình vẽ (h.24-6) ta thấy áp lực đặt trên AD là bằng trọng lực của cả cột chất lỏng BADC dù hình dạng của bình ở phía trên là như thế nào.



Hình 24-6

Thực vậy, khi mặt AD là nằm ngang thì áp suất của chất lỏng ở mọi nơi là như nhau và bằng $p = \gamma x$. γ là trọng lượng riêng của chất lỏng và x là độ cao từ AD đến mặt thoáng của chất lỏng.

Theo định lí thứ 1, hình chiếu của áp lực tác dụng lên AD trên phương thẳng đứng là bằng áp suất nhân với diện tích hình chiếu của AD trên mặt phẳng ngang. Ở đây diện tích hình chiếu cũng chính là nó, do đó ta có :

$$P_x = F.p = F.x.\gamma$$

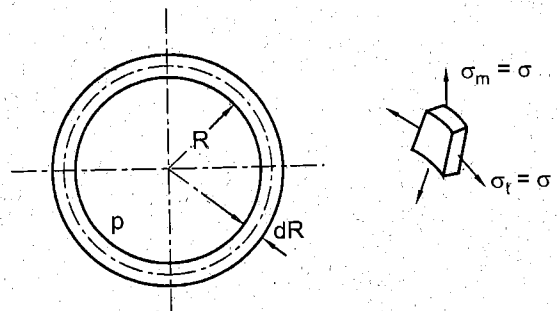
$F.x$ là thể tích của cột chất lỏng ở phía trên AD, vậy P_x là bằng trọng lượng của cả cột chất lỏng phía trên AD.

Ví dụ 1. Vỏ cầu bán kính R , chiều dày δ chịu áp suất bên trong p (h.24-7). Xác định ứng suất trên thành vỏ.

Bài giải

Đối với vỏ cầu ta có $\rho_m = \rho_t = R$ và vì lí do đối xứng nên $\sigma_m = \sigma_t$. Vậy từ phương trình Laplace ta có :

$$\sigma_m = \sigma_t = \frac{p.R}{2\delta}$$



Hình 24 - 7

Thành phần ứng suất thứ ba xem như bằng không. Như vậy ứng suất tương đương theo thuyết bền ứng suất lớn nhất là :

$$\sigma_{td} = \sigma_1 - \sigma_3 = \frac{p.R}{2\delta}$$

Điều kiện bền của vỏ là :

$$\frac{p.R}{2\delta} \leq [\sigma]$$

Ví dụ 2. Một bình chứa hình trụ (h.24–8) chịu áp suất bên trong p . Bán kính hình trụ là R và chiều dày của thành bình là δ . Xác định ứng suất trong thành bình.

Bài giải

Ta tưởng tượng cắt bình với mặt cắt ngang (h.24–8b) vớt bỏ một phần và xét sự cân bằng của phần còn lại : Ta có phương trình cân bằng :

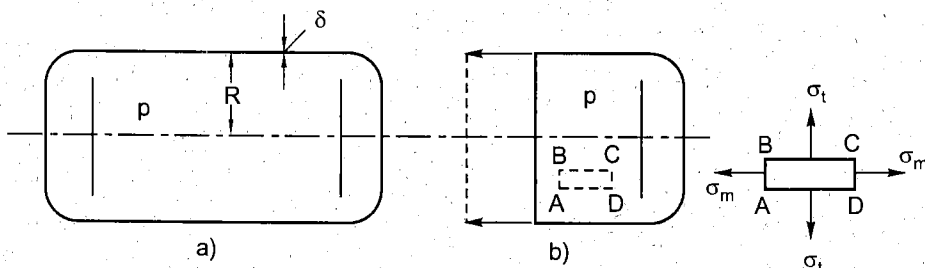
$$\sigma_m \cdot 2\pi \cdot R \cdot \delta = P \quad (1)$$

Thành phần hình chiếu của áp lực lên đáy theo phương của trục bình là :

$$P = \pi R^2 \cdot p$$

Từ đó ta có :

$$P = \pi R^2 \cdot p = \sigma_m \cdot 2\pi \cdot R \cdot \delta$$



Hình 24–8

Hay
$$\sigma_m = \frac{pR}{2} \quad (2)$$

Vì thân bình là hình trụ nên : $\rho_m = \infty$; $\rho_t = R$. Do đó từ phương trình Laplace ta tìm thấy :

$$\sigma_t = \frac{pR}{2} \quad (3)$$

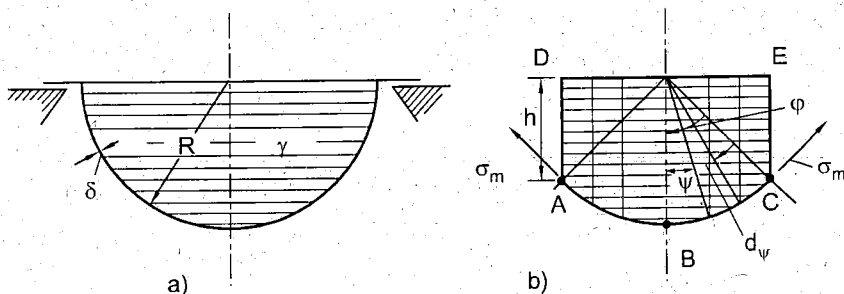
Vậy ứng suất vòng lớn gấp hai lần ứng suất kinh tuyến.

Thành phần ứng suất thứ ba xem như bằng không. Theo thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất ta có điều kiện bền của vỏ trụ là :

$$\sigma_{td} = \sigma_1 - \sigma_3 = \frac{p.R}{\delta} \leq [\sigma]$$

So sánh với ví dụ 1 ta thấy bình chịu áp suất có dạng cầu là lợi hơn vì σ_{td} nhỏ hơn hai lần khi bình có độ dày như nhau.

Ví dụ 3. Thùng bán cầu bán kính R chiều dày δ (h.24–9a) đựng đầy chất lỏng với trọng lượng riêng γ được treo như hình vẽ. Xác định ứng suất trong thành bình và vẽ các biểu đồ σ_m , σ_t và σ_{td} .



Hình 24–9

Bài giải

Ta dùng một mặt cắt hình nón tách chỏm cầu với góc 2φ (h.24–9b) và thiết lập phương trình cân bằng cho chỏm cầu đó. Gọi P là trọng lượng của khối chất lỏng ADECB đặt trên chỏm cầu. Sử dụng góc phụ ψ , thể tích ADECB được tính bởi biểu thức.

$$V = \int_0^\varphi 2\pi R^3 \sin \psi \cos^2 \psi d\psi$$

Từ đó :

$$V = \frac{2}{3} \pi R^3 (1 - \cos^3 \varphi)$$

Viết phương trình cân bằng tổng hình chiếu các lực lên phương thẳng đứng ta tìm thấy :

$$\sigma_m = \frac{\gamma R^2}{3\delta} \cdot \frac{1 - \cos^3 \varphi}{\sin^2 \varphi} \quad (1)$$

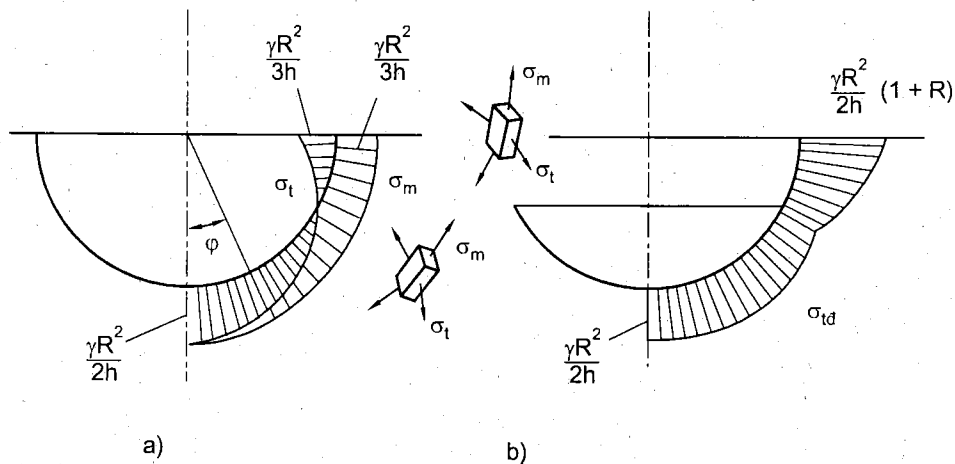
Sử dụng phương trình Laplace và chú ý $\rho_m = \rho_t = R$ với $p = \gamma R \cos \varphi$ ta được :

$$\sigma_t = \frac{\gamma R^2}{3h} \left[3 \cos \varphi - \frac{1 - \cos^3 \varphi}{\sin^2 \varphi} \right] \quad (2)$$

Các biểu đồ σ_m , σ_t được biểu diễn trên hình (24–10). Qua các biểu đồ ta thấy σ_m và σ_t ở điểm thấp nhất của bình có trị số bằng nhau. Ở điểm trên cùng có trị số tuyệt đối bằng nhau nhưng ngược dấu nhau.

Ứng suất tương đương tính theo thuyết bền của Mo là : $\sigma_{td} = \sigma_1 - \alpha \sigma_3$

Trong đó α là tỷ số giữa ứng suất nguy hiểm khi kéo và ứng suất nguy hiểm khi nén.



Hình 24-10

Xét ở hai miền khác nhau : miền σ_m và σ_t là ngược dấu, khi đó ở vùng phía trên ta có :

$$\sigma_{td} = \sigma_m - \alpha \sigma_t$$

Miền có σ_m và σ_t cùng dấu.

Ứng suất tương đương sẽ có trị số là $\sigma_{td} = \sigma_m$.

Do đó biểu đồ σ_{td} có điểm gãy khúc tại vị trí thay đổi dấu của σ_t như trên hình (24-10b).

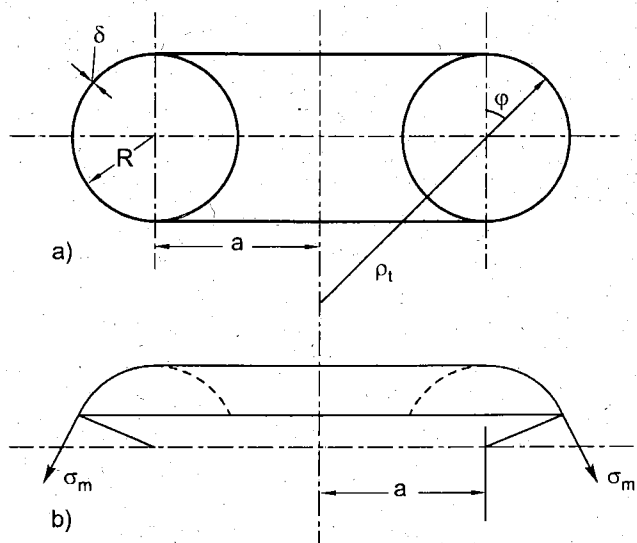
Trị số σ_{td} lớn nhất là :

$$\sigma_{td}^{\max} = \frac{\gamma R^2}{3h} (1 + \alpha)$$

Ví dụ 4. Xác định ứng suất trên thành ống hình xuyến bán kính R chịu áp suất p bên trong. Kích thước của hình xuyến được biểu diễn trên hình vẽ (24-11).

Bài giải

Sử dụng các mặt cắt vuông góc với bề mặt của hình xuyến, chia hình xuyến thành hai phần, tương tự rút bỏ phần dưới và xét sự cân bằng của phần trên (h.24-11b). Thiết lập phương trình hình chiếu của các lực theo phương thẳng đứng ta có :



Hình 24 - 11

$$\sigma_m \cdot 2\pi h(a + R \sin \phi) \sin \phi = p\pi[(a + R \sin \phi)^2 - a^2]$$

$$\sigma_m = \frac{pR(2a + R \sin \phi)}{2h(a + R \sin \phi)}$$

Từ phương trình Laplace với $\rho_m = R$ và $\rho_t = \frac{a + R \sin \varphi}{\sin \varphi}$ ta tìm được :

$$\sigma_t = \frac{pR}{2h}$$

Ứng suất σ_m là cực đại khi $\varphi = -\frac{\pi}{2}$

$$\sigma_m^{\max} = \frac{p.R}{2h} \cdot \frac{2a - R}{a - R}$$

Vì σ_m và σ_t có cùng dấu, vậy ứng suất tương đương theo thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất sẽ là :

$$\sigma_{td} = \sigma_m^{\max} = \frac{p.R}{2h} \cdot \frac{2a - R}{a - R}$$

Ví dụ 5. Thùng chứa hình nón đựng đầy chất lỏng (h.24-12) có trọng lượng riêng là γ . Xác định ứng suất trên thành bình.

Bài giải

Dùng mặt cắt là một mặt nón vuông góc với bề mặt của bình. Xét sự cân bằng của phần dưới (h.24-12). Viết phương trình cân bằng tổng hình chiếu lên phương thẳng đứng ta có :

$$2\pi \cdot y \cdot \tan \alpha \cdot \delta \cdot \sigma_m \cos \alpha = Q + Q_1 \quad (1)$$

Q là trọng lượng của khối chất lỏng trong hình chóp và Q_1 là trọng lượng của cột chất lỏng phía trên hình chóp. Ta có :

$$Q = \frac{\pi \cdot y^3 \cdot \tan^2 \alpha}{3} \gamma \text{ và } Q_1 = \gamma \cdot \pi \cdot y^2 \cdot \tan^2 \alpha (h - y) \quad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta tìm thấy :

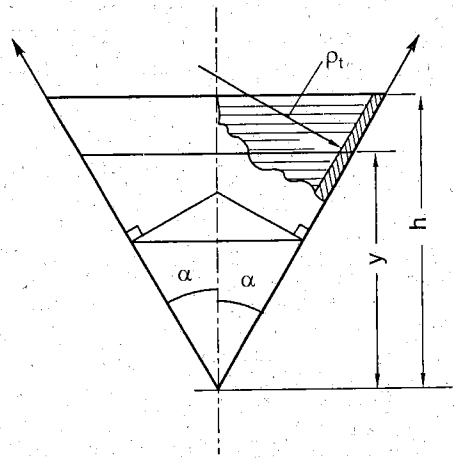
$$\sigma_m = \frac{\gamma \cdot y \cdot \tan \alpha (3h - 2y)}{6} \quad (3)$$

Sử dụng phương trình Laplace với chú ý $\rho_m = \infty$, $\rho_t = \frac{y \tan \alpha}{\cos \alpha}$ và $p = \gamma(h - y)$ ta tìm thấy :

$$\sigma_t = \frac{\gamma(h - y)}{\delta} \cdot \frac{y \tan \alpha}{\cos \alpha} \quad (4)$$

Lấy đạo hàm theo y , ta sẽ tìm thấy trị số cực đại của σ_t tại $y = \frac{h}{2}$. Trị số đó là :

$$\sigma_t^{\max} = \frac{\gamma h^2}{4\delta} \cdot \frac{\tan \alpha}{\cos \alpha} \quad (5)$$



Hình 24 - 12

Tương tự ta có thể tìm thấy $\sigma_m^{\max}$ ở tại $y = \frac{3}{4}h$ và có trị số là :

$$\sigma_m^{\max} = \frac{3}{16} \cdot \frac{\gamma h^2}{\delta} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha} \quad (6)$$

σ_m và σ_t tại đỉnh của hình chóp là bằng không.

Ví dụ 6. Để có thể thực hiện các công tác ở sâu dưới nước người ta đã sử dụng một vỏ mỏng hình parabolôit tròn xoay và thả xuống ở độ sâu như hình vẽ 24–13a. Vẽ biểu đồ ứng suất trong thành vỏ, cho biết $a = 1\text{m}$, $b = 2\text{m}$ và $\delta = 3\text{mm}$.

Bài giải

Xác định hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ. Dạng kinh tuyến của mặt parabolôit được biểu diễn bởi phương trình :

$$y = \frac{b}{a}x^2 \quad (1)$$

Thể tích phần trên của vỏ tính đến mức y là :

$$V = \int_0^y \pi x^2 dy = \frac{\pi a^2}{2b} y^2 \quad (2)$$

Thể tích phía trong của vỏ là :

$$V_B = \frac{\pi}{2} a^2 \cdot b \quad (3)$$

Bây giờ ta hãy xác định mức chất lỏng ở phía trong của vỏ. Nghĩa là ta phải xác định y_1 và H_1 (h.24–13a).

Áp suất p của không khí bên trong vỏ là bằng áp suất của chất lỏng ở độ sâu H_1 . Nghĩa là :

$$p = \gamma H_1 + p_a \quad (4)$$

p_a là áp suất khí quyển ở mặt thoáng bên trên của chất lỏng. Mặt khác p được tính theo định luật Bôi – Mariốt như sau :

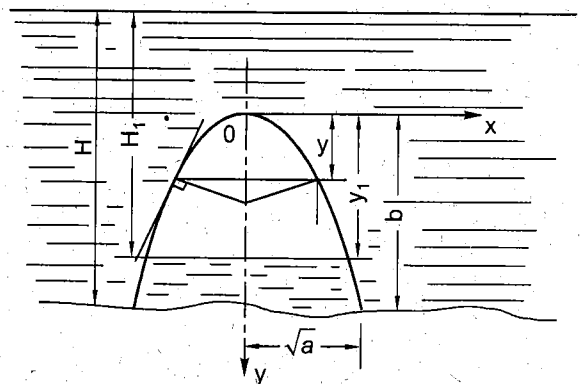
$$p = p_a \cdot \frac{V_B}{V_1} \quad (5)$$

V_1 là thể tích tương ứng với y_1 . Do đó có :

$$p = p_a \cdot \frac{b^2}{y_1^2} \quad (6)$$

Theo (4) ta có :

$$p_a \cdot \frac{b^2}{y_1^2} = \gamma(H - b + y_1) + p_a$$



Hình 24–13a

Từ đó ta có : $y_1^3 + y_1^2 \left(\frac{p_a}{\gamma} + H - b \right) = \frac{p_a}{\gamma} b^2$

Với $p_a = 1 \text{ atm}$ và các kích thước đã cho như trên hình vẽ có :

$$y_1^3 + 1500y_1^2 = 4.10^7$$

Từ đó ta được :

$$y_1 = 155,5 \text{ cm}$$

$$p = p_a \cdot \frac{b^2}{y_1^2} = 16,55 \text{ N/cm}^2$$

Sử dụng một mặt cắt hình nón vuông góc với mặt vỏ và xét sự cân bằng của phần trên (h.24-13a). Lực theo chiều trục tác dụng lên phần đang xét gồm có :

– Áp lực bên trong của vỏ. Trị số là : $p \cdot \pi \cdot x^2$

– Trọng lượng của cột chất lỏng ở phía trên của vỏ :

$$-\gamma \left[\pi x^2 (H - b + y) - \frac{\pi a^2}{2b} y^2 \right]$$

– Áp lực của khí quyển : $-p_a \pi x^2$

Từ đó có phương trình cân bằng :

$$\sigma_m \cdot 2\pi x \cdot \delta \sin \theta = (p - p_a) \pi \cdot x^2 - \gamma \left[\pi x^2 (H - b + y) - \frac{\pi a^2}{2b} y^2 \right] \quad (7)$$

Ta phải xác định $\sin \theta$.

Dễ dàng nhận thấy rằng $\tan \theta = y'$. Vậy $\sin \theta = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}$

Do đó :

$$\sin \theta = \frac{2b}{a} \sqrt{\frac{y}{b} \left[1 + \frac{4b^2}{a^2} - \frac{y}{b} \right]}^{\frac{1}{2}} \quad (8)$$

Để tính σ_t phải xác định các bán kính cong ρ_m và ρ_t

Ta có :

$$\frac{1}{\rho_m} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}$$

Do đó :

$$\rho_m = \frac{a^2}{2b} \left[1 + \frac{4b^2}{a^2} \cdot \frac{y}{b} \right]^{-3/2} \quad (9)$$

$$\rho_t = \frac{x}{\sin \theta} = \frac{a^2}{2b} \left[1 + \frac{4b^2}{a^2} \cdot \frac{y}{b} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (10)$$

Áp suất tác dụng lên vỏ tại điểm đang xét là :

$$p^* = p - [p_a + \gamma(H - b + y)] \quad (11)$$

Với phương trình Laplace

$$\frac{\sigma_m}{\rho_m} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{p^*}{\delta} \quad (12)$$

Sau khi thay (8) vào (7) rồi đưa vào phương trình Laplace cùng với (9) (10) (11) ta tìm thấy :

$$\sigma_m = \frac{a^2}{4b\delta} \left[p - p_a - \gamma b \left(\frac{H}{b} - 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{y}{b} \right) \right] \left(1 + \frac{4b^2}{a^2} \cdot \frac{y}{b} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sigma_t = \frac{a^2}{4b\delta} \left\{ 2 \left[p - p_a - \gamma b \left(\frac{H}{b} - 1 + \frac{y}{b} \right) \right] - \frac{p - p_a - \gamma b \left(\frac{H}{b} - 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{y}{b} \right)}{1 + \frac{4b^2}{a^2} \cdot \frac{y}{b}} \right\} \left(1 + \frac{4b^2}{a^2} \cdot \frac{y}{b} \right)^{\frac{1}{2}}$$

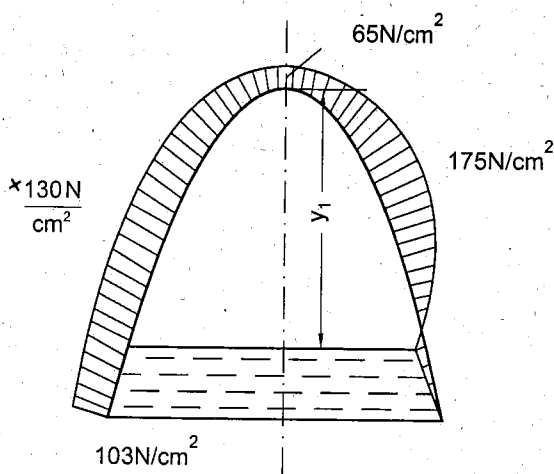
Các công thức đó chỉ đúng khi y biến thiên trong khoảng từ 0 đến y_1 .

Nếu $y > y_1$ thì $p^* = 0$ vì áp suất ở bên trong và bên ngoài là như nhau. Song các thành phần lực mà ta tính toán ở trên là không thay đổi. Trị số của σ_m và σ_t sẽ là :

$$\sigma_m = \frac{a^2}{4b} \cdot \frac{y_1}{y} \left[p - p_a - \gamma b \left(\frac{H}{b} - 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{y_1}{b} \right) \right] \left(1 + \frac{4b^2}{a^2} \cdot \frac{y}{b} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sigma_t = -\frac{a^2}{4b\delta} \cdot \frac{y_1}{y} \left[p - p_a - \gamma b \left(\frac{H}{b} - 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{y_1}{b} \right) \right] \left(1 + \frac{4b^2}{a^2} \cdot \frac{y}{b} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Biểu đồ ứng suất được biểu diễn như trên hình (24-13b)

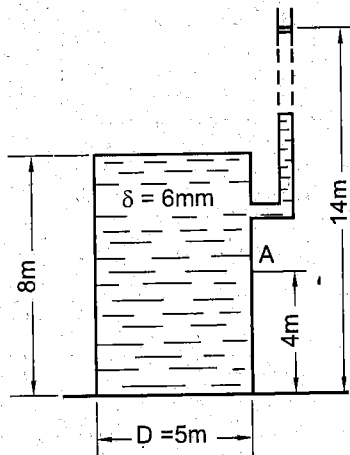


Hình 24-13b

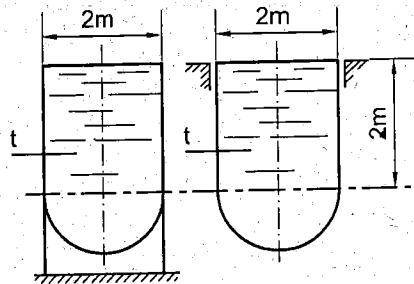
Bài tập

24.1. Tính các biến dạng dài tỉ đối $\epsilon_{\max}$ và $\epsilon_{\min}$ ở điểm A trên thành thùng chứa chất lỏng hình trụ tròn (h.24-14).

Trọng lượng riêng của chất lỏng $\gamma = 10 \text{ kN/m}^3$. Thành thùng làm bằng vật liệu có $E = 2 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$ và $\mu = 0,3$.



Hình 24-14

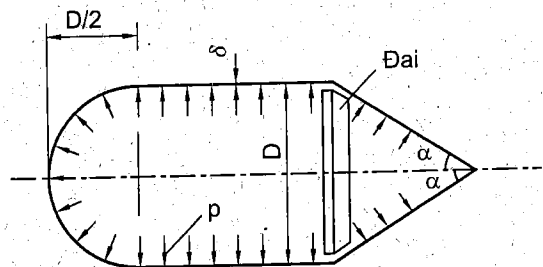


Hình 24-15

24.2. Một bể chứa nước gồm một thân hình trụ tròn và đáy hình bán cầu như trên hình 24-15. Bề dày thành bình $t = 3 \text{ mm}$. Tính ứng suất ở thân bình và ở đáy bình trong hai trường hợp :

1. Bình đặt trên giá đỡ ở phía dưới thân hình trụ.
2. Bình được treo ở phía trên thân hình trụ.

24.3. Xác định bề dày của vỏ mỏng chịu áp suất p của chất khí theo thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất, biết rằng ứng suất cho phép của vật liệu là $[\sigma]$. Tính diện tích F của đai (h.24-16).



Hình 24-16

ỨNG SUẤT TIẾP XÚC

Ứng suất tiếp xúc là ứng suất phát sinh tại vùng lân cận điểm tiếp xúc khi hai vật thể ép lên nhau. Ví dụ chỗ tiếp xúc giữa các viên bi, giữa bi và vòng bi, giữa các mặt răng của các bánh răng v.v...

Bài toán đặt ra cho chúng ta những vấn đề sau đây :

- Khi vật ép lên nhau, chỗ tiếp xúc sẽ bị biến dạng, vậy hình dáng của mặt biến dạng là gì ?
- Độ dịch gần của hai vật thể là bao nhiêu ?
- Cường độ áp suất lớn nhất là bao nhiêu ?
- Cách tính độ bền.

Chúng ta thừa nhận các kết quả đã tính được trong lí thuyết đàn hồi để tính cụ thể cho những trường hợp thường gặp.

§25-1. HÌNH DÁNG CỦA MẶT TIẾP XÚC

Hình dáng của mặt tiếp xúc là một hình elip có phương trình :

$$Ax^2 + By^2 = \alpha \quad (25-1)$$

A và B là các hằng số phụ thuộc vào các bán kính cong chính của các mặt và vị trí tương ứng giữa chúng.

Tỉ số $\frac{A}{B}$ phụ thuộc vào các tích phân elip tích K.D^(*) như sau :

$$\frac{A}{B} = (1 - e^2) \frac{D}{K - D} \quad (25-2)$$

từ biểu thức đó ta lập được bảng 25-1 cho các trị số tương ứng của $\frac{A}{B}$ với e. Theo định nghĩa, nếu gọi a và b là các bán kính chính của elip thì :

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2}$$

Tỉ số $\frac{A}{B}$ được xác định theo Ω .

$$\Omega = \frac{\sqrt{(k_{11} - k_{12})^2 + (k_{21} - k_{22})^2 + 2(k_{11} - k_{12})(k_{21} - k_{22})\cos 2\omega}}{k_{11} + k_{12} + k_{21} + k_{22}} \quad (25-3)$$

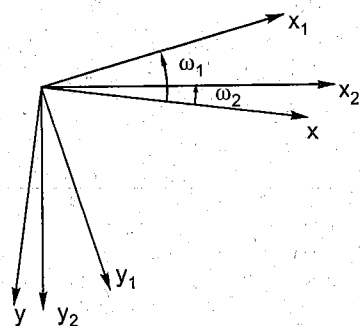
(*) Xem cuối sách

Trong đó k_{11} , k_{12} , k_{21} , k_{22} là các bán kính cong chính của các mặt tiếp xúc, ω là góc tương ứng vị trí của chúng (h.25-1).

Trong hình 25-1, hệ trục tọa độ được xác định để tính là Oxy. Vị trí Ox_1y_1 và Ox_2y_2 là vị trí các mặt chính của các mặt tiếp xúc.

Từ hình vẽ ta có :

$$\omega = \omega_1 - \omega_2 \quad (25-4)$$



Hình 25-1

§25-2. ĐỘ DỊCH GÂN CỦA HAI VẬT THỂ

Gọi δ là độ dịch gân của hai vật thể. δ được tính với biểu thức :

$$\delta - (Ax^2 + By^2) = k_o \int_F \frac{pdF}{r} \quad (25-5)$$

Trong đó :

$$k_o = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \right] = \frac{1}{\pi} \eta$$

$\mu_1 E_1$, $\mu_2 E_2$ là các hệ số Poatxông và môđun đàn hồi của vật liệu.

Trị số :

$$\eta = \frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \quad (25-6)$$

được gọi là hằng số đàn hồi của hai vật thể.

Sau khi tính các tích phân, (25-5) được viết lại dưới dạng :

$$\delta - (Ax^2 + By^2) = \eta \frac{p_o}{a} \left[a.b.K - \frac{b}{a} Dx^2 - \frac{a}{b} (K - D)y^2 \right] \quad (25-7)$$

K và D là các tích phân elip tích đã nói trên.

Các bán trục chính a, b của mặt tiếp xúc được tính với các công thức :

$$a = n_a \sqrt[3]{\frac{3}{2} \frac{\eta.p}{\sum k}} \quad \text{với} \quad n_a = \sqrt[3]{\frac{2}{\pi} \left(1 + \frac{B}{A} \right) D} \quad (25-8)$$

$$b = n_b \sqrt[3]{\frac{3}{2} \frac{\eta.p}{\sum k}} \quad \text{với} \quad n_b = \sqrt[3]{\frac{2}{\pi} \left(1 + \frac{A}{B} \right) (K - D) \sqrt{1 - e^2}} \quad (25-9)$$

Sau khi tính ta có :

$$\delta = n_\delta \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{9}{4} \eta^2 \sum k p^2} \quad \text{với} \quad n_\delta = K \sqrt[3]{\frac{4}{\pi^2} \frac{1}{1 + \frac{B}{A}} \frac{1}{D}} \quad (25-10)$$

Trong đó $\sum k = k_{11} + k_{12} + k_{22} + k_{21}$.

§25-3. CƯỜNG ĐỘ ÁP SUẤT LỚN NHẤT

Thừa nhận sự phân bố của áp suất là theo quy luật elip-sô-ít, như vậy áp suất lớn nhất là ở tâm diện tích tiếp xúc với trị số là :

$$p_o = \frac{3}{2} \cdot \frac{p}{\pi ab} \quad (25-11)$$

Sau khi thay trị số của a và b được tính từ (25-8), (25-9) vào ta có :

$$p_o = n_p \frac{1}{\pi} \sqrt[3]{\frac{3}{2} \left(\frac{\sum k}{\eta} \right)^2} \cdot p \quad (25-12)$$

Trong đó

$$n_p = \frac{1}{n_a \cdot n_b}$$

Chúng ta xét cụ thể một số trường hợp thường gặp sau đây :

1. Tiếp xúc của hai hình cầu bán kính R_1 và R_2

Mặt tiếp xúc là hình tròn với bán kính :

$$a = b = 0,9086 \sqrt[3]{\eta p \cdot \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} \quad (25-13)$$

Cường độ áp suất lớn nhất là :

$$p_o = 0,5784 \sqrt[3]{\frac{p}{\eta^2} \cdot \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \right)^2} \quad (25-14)$$

Độ dịch gần là :

$$\delta = 0,8255 \sqrt[3]{\eta p^2 \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}} \quad (25-15)$$

Nếu cùng loại vật liệu với $\mu = 0,3$ ta sẽ có :

$$a = b = 1,109 \sqrt[3]{\frac{p}{E} \cdot \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}$$
$$p_o = 0,3880 \sqrt[3]{p \cdot E^2 \cdot \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \right)^2} \quad (25-16)$$

$$\delta = 1,231 \sqrt[3]{\left(\frac{p}{E} \right)^2 \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}}$$

2. Tiếp xúc của hai hình trụ có cùng bán kính R và có trục vuông góc

Hình dáng mặt tiếp xúc cũng là đường tròn. Bán kính là :

$$a = b = 0,9086 \sqrt[3]{\eta \cdot p \cdot R} \quad (25-17)$$

Áp suất lớn nhất là :

$$p_o = 0,5784 \sqrt[3]{\frac{p}{\eta^2 \cdot R}} \quad (25-18)$$

Độ dịch gần là :

$$\delta = 0,8255 \cdot \sqrt[3]{\frac{(\eta p)^2}{R}} \quad (25-19)$$

3. Tiếp xúc của hai hình trụ có bán kính R_1 và R_2 có trục song song

Diện tích tiếp xúc là một dải rộng b song song với các trục b, được tính với công thức :

$$b = 1,128 \sqrt{\eta q \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} \quad (25-20)$$

Cường độ áp suất lớn nhất là :

$$p_o = 0,5642 \sqrt{\frac{q}{\eta} \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}} \quad (25-21)$$

Độ dịch gần là :

$$\delta = \frac{2q}{\pi} \left[\frac{1 - \mu_1^2}{E_1} \left(\ln \frac{2R_1}{b} + 0,407 \right) + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \left(\ln \frac{2R_2}{b} + 0,407 \right) \right]$$

Nếu cùng loại vật liệu với $\mu = 0,30$ thì :

$$\delta = \frac{2q}{\pi} \cdot \frac{1 - \mu^2}{E} \left(\ln \frac{2R_1}{b} + \ln \frac{2R_2}{b} + 2 \cdot 0,407 \right) \quad (25-22)$$

Trong tất cả công thức trên q là tải trọng phân bố trên chiều dài

§25-4. CÁCH TÍNH ĐỘ BỀN

Khi diện tích tiếp xúc là hình elip, điểm có trị số ứng suất tiếp cực đại ở tại độ sâu $z = 0,31a$. Trị số ứng suất đó gần bằng $0,325p_o$ và hầu như không đổi khi tỉ số $\frac{b}{a}$ thay đổi.

Vậy điều kiện bền là :

$$\tau_{\max} = 0,325p_o \leq [\tau] \quad (25-23)$$

Trong trường hợp tiếp xúc đường trị số của τ sẽ là :

$$\tau_{\max} = 0,300p_o \quad (25-24)$$

và ở tại độ sâu $z = 0,8b$

Nếu tính với thuyết bền thế năng biến đổi hình dáng thì ta có :

$$\sigma_{td} = 0,557p_o \text{ với } z = 0,7b \quad (25-25)$$

Vậy điều kiện bền sẽ là :

$$\text{Hoặc } \tau_{\max} = 0,300p_o \leq [\tau] \quad (25-26)$$

$$\text{hoặc } \sigma_{td} = 0,557p_o \leq [\sigma]$$

Trong tính toán thực tế người ta còn dùng trị số áp lực cho phép $[p_o]$. Điều kiện bền có thể thực hiện với biểu thức :

$$p_o \leq [p_o]$$

Bảng 25-1

Các hệ số n_a, n_b, n_p, n_δ được xác định theo Ω như sau :

e^2	A/B	Ω	n_a	n_b	n_p	n_δ
0.050	0.9623	0.01923	1.013	0.9873	0.9999	0.9999
0.100	0.9240	0.03949	1.027	0.9742	0.9997	0.9997
0.150	0.8852	0.06087	1.042	0.9606	0.9992	0.9992
0.200	0.8459	0.08350	1.058	0.9465	0.9985	0.9985
0.250	0.8059	0.01075	1.076	0.9318	0.9974	0.9974
0.300	0.7652	0.1330	1.095	0.9165	0.9960	0.9960
0.350	0.7238	0.1602	1.117	0.9005	0.9942	0.9942
0.400	0.6816	0.1894	1.141	0.8837	0.9919	0.9919
0.450	0.6384	0.2207	1.168	0.8660	0.9890	0.9889
0.500	0.5942	0.2545	1.198	0.8472	0.9853	0.9852
0.550	0.5489	0.2913	1.233	0.8271	0.9805	0.9804
0.600	0.5022	0.3314	1.274	0.8056	0.9746	0.9744
0.650	0.4540	0.3755	1.322	0.7822	0.9669	0.9667
0.700	0.4040	0.4245	1.381	0.7565	0.9571	0.9566
0.750	0.3518	0.4795	1.456	0.7278	0.9440	0.9432
0.760	0.3410	0.4914	1.472	0.7216	0.9409	0.9400
0.770	0.3301	0.5036	1.491	0.7152	0.9376	0.9366
0.780	0.3191	0.5161	1.511	0.7086	0.9340	0.9329
0.790	0.3080	0.5291	1.532	0.7019	0.9302	0.9290
0.800	0.2967	0.5423	1.554	0.6949	0.9262	0.9248
0.810	0.2853	0.5560	1.578	0.6876	0.9219	0.9203
0.820	0.2738	0.5702	1.603	0.6801	0.9172	0.9155
0.830	0.2620	0.5848	1.631	0.6723	0.9121	0.9102

e^2	A/B	Ω	η_a	η_b	η_p	η_δ
0.840	0.2501	0.5999	1.660	0.6642	0.9067	0.9045
0.850	0.2380	0.6155	1.693	0.6557	0.9008	0.8983
0.860	0.2257	0.6317	1.729	0.6468	0.8914	0.8916
0.870	0.2132	0.6486	1.768	0.6374	0.8873	0.8841
0.880	0.2004	0.6662	1.812	0.6276	0.8766	0.8759
0.890	0.1873	0.6845	1.861	0.6171	0.8710	0.8668
0.900	0.1739	0.7037	1.916	0.6059	0.8614	0.8566
0.910	0.1603	0.7238	1.979	0.5938	0.8507	0.8451
0.920	0.1462	0.7449	2.053	0.5808	0.8386	0.8320
0.930	0.1317	0.7673	2.141	0.5665	0.8246	0.8168
0.940	0.1166	0.7911	2.248	0.5505	0.8082	0.7990
0.950	0.1010	0.8166	2.381	0.5325	0.7887	0.7775
0.955	0.09287	0.8300	2.463	0.5224	0.7774	0.7650
0.960	0.08456	0.8441	2.557	0.5114	0.7617	0.7509
0.965	0.07600	0.8587	2.669	0.4993	0.7504	0.7349
0.970	0.06715	0.8741	2.805	0.4858	0.7338	0.7163
0.975	0.05759	0.8904	2.975	0.4704	0.7144	0.6943
0.980	0.04838	0.89077	3.199	0.4524	0.6909	0.6675
0.981	0.04639	0.9113	3.253	0.4484	0.6856	0.6613
0.982	0.04439	0.9150	3.311	0.4442	0.6799	0.6549
0.983	0.04237	0.9187	3.373	0.4398	0.6740	0.6481
0.984	0.04032	0.9225	3.441	0.4352	0.6678	0.6409
0.985	0.03823	0.9264	3.514	0.4304	0.6612	0.6333
0.986	0.03613	0.9303	3.594	0.4253	0.6542	0.6251
0.987	0.03400	0.9342	3.683	0.4199	0.6467	0.6164
0.988	0.03183	0.9383	3.781	0.4142	0.6387	0.6071
0.989	0.02962	0.9425	3.890	0.4080	0.6300	0.5970
0.990	0.02737	0.9467	4.014	0.4014	0.6206	0.5860
0.991	0.02508	0.9511	4.156	0.3942	0.6104	0.5741
0.992	0.02273	0.9556	4.320	0.3864	0.5990	0.5608
0.993	0.02033	0.9601	4.515	0.3777	0.5864	0.5460
0.994	0.01787	0.9649	4.750	0.3680	0.5721	0.5292
0.995	0.01533	0.9698	5.046	0.3568	0.5555	0.5096
0.996	0.01269	0.9749	5.432	0.3436	0.5358	0.4864
0.997	0.009934	0.9803	5.976	0.3227	0.5112	0.4574
0.998	0.007018	0.9861	6.837	0.3058	0.4783	0.4186
0.999	0.003850	0.9923	8.609	0.2722	0.4267	0.3579

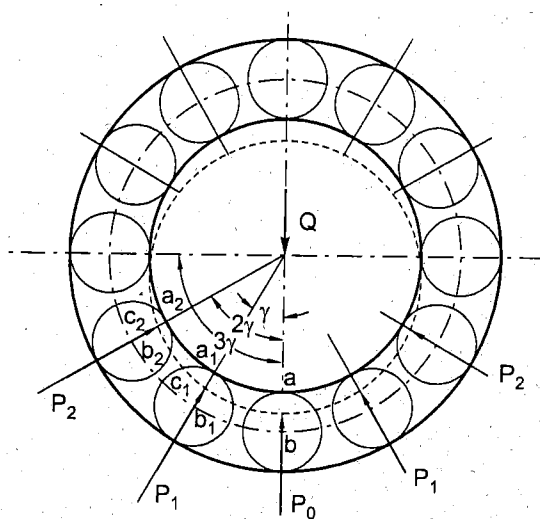
§25-5. MỘT SỐ BÀI TOÁN TIẾP XÚC THƯỜNG GẶP

1. Tính vòng bi khi chịu tải trọng tĩnh

Vòng bi được biểu diễn trên hình 25-2 và sơ đồ chịu lực cũng được biểu diễn trên hình vẽ đó.

Vòng bi gồm có vòng đệm bên trong, vòng đệm bên ngoài, các vòng cách và các viên bi. Trên các vòng đệm người ta tạo nên các rãnh hình lòng máng để làm đường trượt cho các viên bi. Các vòng cách giữ cho các viên bi có được các vị trí tương đối với nhau.

Vòng bi chịu tải trọng Q . Tải trọng đó truyền xuống các viên bi qua vòng đệm trong và từ các viên bi chuyển xuống vòng đệm ngoài rồi tác động lên thành máy. Dễ dàng nhận thấy rằng viên bi ở vị trí thấp nhất sẽ là viên bi chịu tải trọng lớn nhất. Chúng ta phải xác định trị số của tải trọng này.



Hình 25-2

Để đơn giản bài toán ta giả sử rằng :

a) Vòng bi được lắp khít, khe hở theo hướng kính giữa vòng trong, vòng ngoài và các viên bi là không có.

b) Ta chỉ tính đến biến dạng của bi và vòng đệm tại điểm tiếp xúc. Biến dạng do độ uốn của các vòng đệm được bỏ qua.

Bây giờ ta hãy tưởng tượng : dưới tác dụng của Q , vòng đệm trong được xem như một vật rắn tuyệt đối, có một chuyển vị $\delta_0 = ab$ theo phương của lực. Vòng bi ngoài cũng được xem như cứng tuyệt đối. Do đó sự biến dạng của viên bi tạo nên các chuyển vị $ab, a_1b_1, a_2b_2 \dots$ theo phương tải trọng Q của các điểm tiếp xúc $a, a_1, a_2 \dots$. Các chuyển vị đó phải bằng nhau và bằng $ab = a_1b_1 = a_2b_2 = \dots = \delta_0$.

Từ các tam giác $a_1b_1c_1, a_2b_2c_2 \dots$ ta có thể tìm thấy các thành phần chuyển vị theo phương bán kính của các điểm tiếp xúc là :

$$\delta_1 = a_1c_1 = \delta_0 \cos \gamma$$

$$\delta_2 = a_2c_2 = \delta_0 \cos 2\gamma$$

....

$$\delta_n = a_nc_n = \delta_0 \cos n\gamma$$

(25-27)

Ở đây góc $\gamma, 2\gamma, \dots, n\gamma$ là các góc làm bởi phương của lực Q và phương bán kính đi qua tâm của các viên bi. Ta nhận thấy rằng góc lớn nhất trong chúng phải nhỏ hơn $\frac{\pi}{2}$ ($n\gamma \leq \frac{\pi}{2}$) vì các viên bi phía trên không chịu lực.

Các chuyển vị $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ là độ dịch gần của các vật thể tiếp xúc. Chúng được tính với công thức tổng quát (25-10). Các công thức đó được viết lại như sau :

$$\delta = n_{\delta} \cdot \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{9}{4} \eta^2 \sum k \cdot P^2}$$

Với :

$$n_{\delta} = K \sqrt[3]{\frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{B}{A}} \cdot \frac{1}{D}}$$

Sử dụng công thức đó ta dễ dàng biểu diễn các chuyển vị qua trị số lực tác dụng như sau :

$$\left. \begin{aligned} \delta_o &= CP_o^{2/3} \\ \delta_1 &= C \cdot P_1^{2/3} \\ &\dots \\ \delta_n &= CP_n^{2/3} \end{aligned} \right\} \quad (25-28)$$

Với các biểu thức (25-27) và (25-28) ta có thể biểu diễn $P_1, P_2, \dots, P_n$ theo P_o như sau :

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= P_o \cos^{3/2} \gamma \\ P_2 &= P_o \cos^{3/2} 2\gamma \\ &\dots \\ P_n &= P_o \cos^{3/2} n\gamma \end{aligned} \right\} \quad (25-29)$$

Từ phương trình cân bằng thu được :

$$Q = P_o + 2P_1 \cos \gamma + 2P_2 \cos 2\gamma + \dots + 2P_n \cos n\gamma$$

Thay (25-29) vào ta có :

$$Q = P_o [1 + 2\cos^{5/2} \gamma + 2\cos^{5/2} 2\gamma + \dots + 2\cos^{5/2} n\gamma]$$

Ta gọi k là tỉ số :

$$k = \frac{i}{1 + 2\cos^{5/2} \gamma + 2\cos^{5/2} 2\gamma + \dots + 2\cos^{5/2} n\gamma} \quad (25-30)$$

trong đó i là số viên bi của vòng, tương quan giữa P_o và Q được viết gọn lại dưới dạng :

$$P_o = k \cdot \frac{Q}{i} \quad (25-31)$$

Với các phép toán cụ thể ta thấy khi thay đổi i từ 10 đến 20 trị số k hầu như không đổi. Giả sử lấy i = 10, khi đó :

$$k = \frac{10}{1 + \cos^{5/2} 30^\circ + 2\cos^{5/2} 60^\circ} = 4,38$$

Với i = 20 ta tìm thấy k = 4,37.

Nếu kể đến khe hở giữa các vòng đệm với bi và kể đến độ biến dạng khi uốn của các vòng đệm thì hệ số k được nâng lên một ít. Thường chọn $k = 5$, vậy :

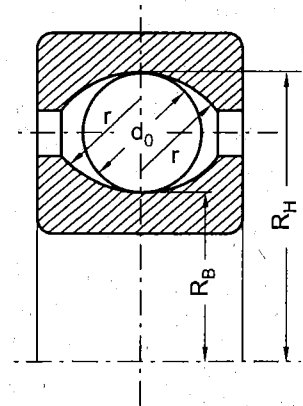
$$P_o = 5 \frac{Q}{i} \quad (25-32)$$

Diện tích tiếp xúc giữa bi và các vòng đệm :

Diện tích đó có dạng hình elip. Các bán trục được xác định như sau :

Với các kích thước đã cho trên hình 25-3, ta có các độ cong chính là : $k_{11} = k_{12} = \frac{2}{d_o}$

Đối với vòng đệm trong, độ cong $k_{21} = \frac{1}{R_B}$ và với vòng đệm ngoài $k_{21} = -\frac{1}{R_H}$. Độ cong chính k_{22} của cả hai vòng đệm là như nhau và bằng $k_{22} = -\frac{1}{r}$.



Hình 25-3

Diện tích tiếp xúc ở đây là một hình elip. Các bán kính chính a, b được xác định bởi công thức (25-8) và (25-9). Để xác định n_a, n_b theo bảng 25-1 chúng ta phải tính Ω theo công thức (25-3). Trong trường hợp đang xét vì $k_{12} = k_{11}$ nên biểu thức Ω được thu gọn lại như sau :

$$\Omega = \frac{k_{21} - k_{22}}{\sum k} \quad (25-33)$$

Trị số áp suất lớn nhất p_o được xác định bởi công thức (25-12) và điều kiện bền của bi là : $p_o \leq [p_o]$.

Ví dụ 1. Cho vòng bi số hiệu 217 với các kích thước sau đây : đường kính trong $d = 85\text{mm}$, đường kính ngoài $D = 150\text{mm}$. Bề rộng $B = 28\text{mm}$. Đường kính bi $d_o = 19,84\text{mm}$. Số bi $i = 10$. Bán kính mặt cắt ngang của lòng máng $r = 0,515d_o = 10,23\text{mm}$. Tải trọng tác động lên vòng bi $Q = 34000\text{N}$. Cho biết $[p_o] = 35000\text{N/cm}^2$. Tính độ bền của vòng bi.

Bài giải

Với các kích thước đã cho, suy ra :

Độ dày cực tiểu của vòng bi dọc theo lòng máng là :

$$h = \frac{1}{2} \left(\frac{D - d}{2} - d_o \right) = \frac{1}{2} (32,5 - 19,84) = 6,33\text{mm}$$

Đường bán kính của lòng máng thuộc vòng đệm ngoài :

$$R_H = \frac{D}{2} - h = 75 - 6,33 = 68,67\text{mm}$$

Đường bán kính của lòng máng thuộc vòng đệm trong :

$$R_B = \frac{d}{2} + h = 42,5 + 6,33 = 48,83\text{mm}$$

Tải trọng đặt lên viên bi ở vị trí thấp nhất là :

$$P_o = 5 \cdot \frac{Q}{i} = 5 \frac{34000}{10} = 17000N$$

Bi và vòng đệm cùng làm bằng một loại vật liệu có môđun đàn hồi $E = 2,12 \cdot 10^7 N/cm^2$ và hệ số Poátxông $\mu = 0,30$. Vậy hằng số đàn hồi có trị số là :

$$\eta = 2 \cdot \frac{1 - \mu^2}{E} = 0,858 \cdot 10^{-7} cm^2/N$$

Trị số các độ cong chính là :

$$k_{11} = k_{12} = \frac{2}{d_o} = \frac{2}{1,984} = 1,008 \text{ l/cm}$$

Với vòng đệm ngoài :

$$k_{21} = -\frac{1}{R_H} = -\frac{1}{6,867} = -0,1456 \text{ l/cm}$$

$$k_{22} = -\frac{1}{r} = -\frac{1}{1,023} = -0,9775 \text{ l/cm}$$

Với vòng đệm trong :

$$k_{21} = \frac{1}{R_B} = \frac{1}{4,883} = 0,2048 \text{ l/cm}$$

$$k_{22} = -\frac{1}{r} = -\frac{1}{1,023} = -0,9775 \text{ l/cm}$$

Vậy với sự tiếp xúc của bi và vòng đệm ngoài ta có :

$$\sum k = 2 \cdot 1,008 - 0,1456 - 0,9775 = 0,8929 \text{ l/cm}$$

Trị số của Ω là :

$$\Omega = \frac{-0,1456 + 0,9775}{0,8929} = 0,9317 \text{ l/cm}$$

Tra bảng 25-1 có :

$$n_a = 3,594 + \frac{0,9317 - 0,9303}{0,9342 - 0,9303} (3,683 - 3,594) = 3,626$$

$$n_b = 0,4253 - 0,3590 \cdot 0,054 = 0,4234$$

$$n_p = 0,6542 - 0,3590 \cdot 0,0075 = 0,6515$$

Từ đó ta có :

$$a = 3,626 \sqrt[3]{\frac{3}{2} \cdot \frac{0,858 \cdot 10^{-7}}{0,8920} \cdot 17000} = 0,489 \text{ cm}$$

$$b = 0,4234 \cdot 0,1348 = 0,0570 \text{ cm}$$

$$p_o = \frac{0,6515}{3,14} \sqrt[3]{\frac{3}{2} \left(\frac{0,8929}{0,858 \cdot 10^{-7}} \right)^2 \cdot 17000} = 291000 \text{ N/cm}^2$$

Với sự tiếp xúc của bi và vòng đệm trong ta có :

$$\Sigma k = 2.1,008 + 0,2048 - 0,9775 = 1,243 \text{ l/cm}$$

$$\Omega = \frac{0,2048 + 0,9775}{1,243} = 0,9510$$

Tra bảng 25-1 và tính toán tương tự tìm được :

$$n_a = 4,156 ; n_b = 0,3942 ; n_p = 0,6104$$

Từ đó ta có :

$$a = 4,156 \sqrt[3]{\frac{3}{2} \cdot \frac{0,858 \cdot 10^{-7}}{1,243} \cdot 17000} = 0,502 \text{ cm}$$

$$b = 0,3942 \cdot 0,1207 = 0,0476 \text{ cm}$$

$$p_o = \frac{0,6104}{3,14} \sqrt[3]{\frac{3}{2} \left(\frac{1,243}{0,858 \cdot 10^{-7}} \right)^2} = 34000 \text{ N/cm}^2$$

Đối với vật liệu làm bi và vòng đệm $[p_o] = 35000 \text{ N/cm}^2$

Để tính độ bền ta có thể so sánh p_o với $[p_o]$.

Thực ra như đã nói ở trên, điểm nguy hiểm nhất là tại trong lòng vật thể ở độ sâu $z = 0,8b$. Trị số ứng suất tiếp cực đại tại đó là $\tau_{\max} = 0,325p_o$, khi tỉ số $\frac{b}{a} = 0,5$. Với các trị số khác của tỉ số $\frac{b}{a}$, $\tau_{\max}$ có trị số xấp xỉ $0,325p_o$.

Khi $\frac{b}{a} = 0,1$ thì $\tau_{\max} = 0,310p_o$ và khi $\frac{b}{a} = 0$ thì $\tau_{\max} = 0,300p_o$. Ta phải so sánh trị số này với $[\tau]$. Song vì chúng chỉ khác nhau bởi một hằng số nên có thể định ra $[p_o]$ từ $[\tau]$ và điều kiện bền của vật thể sẽ là :

$$p_o \leq [p_o]$$

Để tiện lợi hơn người ta đã đưa ra cách tính độ bền như sau :

Nhận thấy rằng các bán kính R_B và R_H có thể biểu diễn qua đường kính d_o của bi. Thực vậy, có thể viết $R_B = \alpha d_o$ và $R_H = \beta d_o$, α và β là các hệ số không thay đổi đối với một họ vòng bi có một tỉ lệ kích thước nhất định.

Vì áp suất giữa bi và vòng đệm trong lớn hơn áp suất giữa bi và vòng đệm ngoài, do đó ta chỉ căn cứ vòng trong để tính độ bền.

Tổng độ cong có trị số là :

$$\Sigma k = 2 \cdot \frac{2}{d_o} + \frac{1}{R_B} - \frac{1}{r} = \frac{1}{d_o} \left(4 + \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right)$$

Hằng số đàn hồi là :

$$\eta = 2 \frac{1 - \mu^2}{E} = 0,858 \cdot 10^{-7} \text{ cm}^2/\text{N}$$

Tải trọng đặt lên bi là :

$$P_o = 5 \cdot \frac{Q}{i}$$

Thay các đại lượng đó vào công thức (25-12) ta xác định được biểu thức của p_o như sau :

$$p_o = C \sqrt[3]{\frac{Q}{id_o^2}} \quad (25-34)$$

Hệ số C được tính với biểu thức :

$$C = n_p \cdot \frac{1}{\pi} \sqrt[3]{\frac{3}{2} \left(4 + \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right)^2 \left(\frac{10^7}{0,858} \right)^2} \cdot 5 \quad (25-35)$$

Ví dụ với trường hợp đang xét :

$$C = \frac{0,6104}{3,14} \sqrt[3]{\frac{3}{2} \left(4 + \frac{1}{2,46} - \frac{1}{0,515} \right)^2 \cdot \left(\frac{10^7}{0,858} \right)^2} \cdot 5 \approx 77000$$

Công thức (25-34) được viết lại dưới dạng :

$$p_o = 77000 \sqrt[3]{\frac{Q}{id_o^2}} \quad (25-36)$$

Đối với một họ vòng bi, C là một hằng số và công thức (25-36) trở thành công thức chung cho họ vòng bi đó.

Nếu giả sử rằng áp suất cho phép $[p_o] = 339000 \text{ N/cm}^2$ ta sẽ đi đến biểu thức tính lực Q lớn nhất có thể đạt được như sau :

$$Q = \left(\frac{339000}{77000} \right)^3 \cdot id_o^2 = 85 id_o^2 \quad (25-37)$$

Nếu giả sử sử dụng $[p_o] = 347000 \text{ N/cm}^2$ ta sẽ được :

$$Q = \left(\frac{347000}{77000} \right)^3 \cdot id_o^2 = 92 id_o^2 \quad (25-38)$$

Các công thức (25-37) và (25-38) là những công thức đã sử dụng trong các sổ tay công nghệ chế tạo máy

2. Tính tiếp xúc giữa hình cầu và tấm phẳng

Ví dụ 2. Phôi của tấm tròn chịu nén bởi lực $Q = 7500 \text{ N}$ lên ba điểm tựa có hình dạng mặt cầu bán kính $R = 15 \text{ mm}$ (h.25-4). Cả ba gối tựa cầu được đặt trên một đường tròn nào đó đồng tâm với phôi và cách nhau theo góc 120° . Do đó Q được phân bố đều lên các gối tựa.

Tính kích thước của diện tích tiếp xúc và áp lực lớn nhất giữa gối tựa và tấm tròn. Xác định độ chuyển dịch của phôi do biến dạng của các gối tựa dưới tác dụng của lực nén gây nên. Vật liệu của phôi cũng như của các gối tựa là bằng thép.

Hỏi nếu tấm phôi là gang thì các kết quả sẽ thay đổi ra sao ?

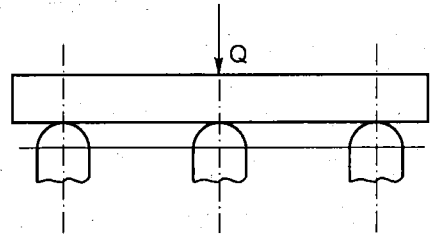
Bài giải

Tải trọng tác động lên mỗi gối tựa là :

$$P = \frac{1}{3}Q = 2500\text{N}$$

Với thép ta có $E = 2,1 \cdot 10^7 \text{N/cm}^2$ và $\mu = 0,28$. Vậy hằng số đàn hồi của vật liệu khi tiếp xúc là :

$$\eta = 2 \frac{1 - \mu^2}{E} = 0,878 \cdot 10^{-7} \text{ cm}^2/\text{N}$$



Hình 25-4

Ở đây sự tiếp xúc có thể xem như giữa hình cầu và mặt phẳng. Ta có : $R_1 = R$ và $R_2 = \infty$. Bán kính diện tích tiếp xúc là :

$$a = 0,9086 \sqrt[3]{\eta PR} = 6,3 \cdot 10^{-3} \text{ cm} = 0,063 \text{ mm}$$

Áp suất lớn nhất ở tâm :

$$p_0 = 0,5784 \sqrt[3]{\frac{P}{\eta^2} \cdot \frac{1}{R^2}} = 300.000 \text{ N/cm}^2$$

Chuyển dịch của phôi là độ dịch gần của hai vật tiếp xúc :

$$\delta = 0,8255 \sqrt[3]{(\eta P)^2 \frac{1}{R}} = 2,6 \cdot 10^{-3} \text{ cm} = 0,026 \text{ mm}$$

Đối với thép hợp kim crôm áp suất p_0 trên đây là cho phép. Nếu phôi là gang ta có $E = 1,2 \cdot 10^7 \text{N/cm}^2$ và $\mu = 0,25$. Hằng số đàn hồi có trị số là :

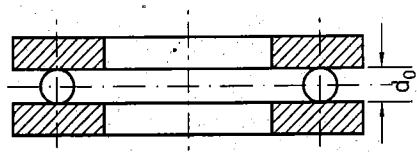
$$\eta = \frac{1 - 0,28^2}{2,1 \cdot 10^7} + \frac{1 - 0,25^2}{1,2 \cdot 10^7} = 1,22 \cdot 10^{-7} \text{ cm}^2/\text{N}$$

Ta tìm thấy :

$$a = 7 \cdot 10^{-3} \text{ cm} = 0,07 \text{ mm} ; p_0 \approx 230000 \text{ N/cm}^2 ; \delta = 3,3 \cdot 10^{-3} \text{ cm} = 0,033 \text{ mm}.$$

Ví dụ 3. Ổ bi chặn có các vòng đệm phẳng không có rãnh (h.25-5). Hãy xác định :

1. Lực cho phép Q tác động theo chiều trục.
2. Kích thước diện tích tiếp xúc giữa bi và vòng đệm.
3. Độ dịch gần giữa hai vòng đệm do biến dạng đàn hồi gây nên.



Hình 25-5

Cho biết số bi $i = 20$ viên, đường kính của các viên bi là $d_o = 1\text{cm}$. Vật liệu của vòng đệm và của bi là thép hợp kim crôm. Áp suất cho phép lớn nhất là $[p_o] = 350000\text{N/cm}^2$.

Bài giải

Theo công thức (25-16) với $\mu = 0,30$, ta có :

$$p_o = 0,3880 \sqrt[3]{PE^2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^2} \quad (1)$$

Trong trường hợp đang xét có :

$$\frac{1}{R_1} = \frac{2}{d_o} \text{ và } \frac{1}{R_2} = 0$$

Áp lực tác dụng lên một viên bi được tính với biểu thức :

$$P = \frac{Q}{0,8i} \quad (2)$$

Hệ số 0,8 thể hiện sự phân bố không đều của tải trọng lên mỗi viên bi

Kết hợp giữa (1) và (2) tìm thấy :

$$Q = 3,42 \frac{p_o^3 \cdot i \cdot d_o^2}{E^2}$$

Thay trị số vào có :

$$Q = 3,42 \cdot \frac{350000^3 \cdot 20 \cdot 1}{(2,12 \cdot 10^7)^2} = 6530\text{N}$$

Tải trọng tác động lên mỗi viên bi là :

$$P = \frac{Q}{0,8i} = \frac{6530}{0,8 \cdot 20} = 408\text{N}$$

Bán kính của diện tích tiếp xúc là :

$$a = b = 1,109 \sqrt[3]{\frac{P}{E} \cdot \frac{d_o}{2}} = 1,109 \sqrt[3]{\frac{408}{2,12 \cdot 10^7} \cdot \frac{1}{2}} \approx 0,024\text{cm}$$

Độ dịch gần giữa bi và vòng đệm là :

$$\delta = 1,231 \sqrt[3]{\left(\frac{P}{E} \right)^2 \cdot \frac{2}{d_o}} = 1,231 \sqrt[3]{\left(\frac{408}{2,12 \cdot 10^7} \right)^2 \cdot 2} = 0,0011\text{cm}$$

Độ dịch gần giữa hai vòng đệm là : $2\delta = 0,0022\text{cm}$

3. Tính tiếp xúc giữa hai hình trụ

Ví dụ 4. Vòng bi con lăn của bánh xe tàu điện có kích thước $120 \times 260 \times 86\text{mm}$. Tính chiều rộng của diện tích tiếp xúc giữa con lăn và vòng đệm (h.25-6).

Các kích thước của ổ bi như sau : $d_o = 36\text{mm}$; $L = 58\text{mm}$; $D_o = 154\text{mm}$.

Số lượng con lăn $i = 13$. Tải trọng tác dụng lên ổ bi là $Q = 45000\text{N}$.

Bài giải

Con lăn chịu tải trọng lớn nhất ở vị trí dưới cùng. Tải trọng tác động lên con lăn đó được tính với biểu thức :

$$P = 4,6 \cdot \frac{Q}{i} = 4,6 \cdot \frac{45000}{13} = 15900\text{N}$$

Chiều dài làm việc của con lăn :

$$l = L - 2\lambda = 58 - 8 = 50\text{mm}$$

Trong đó λ là chiều rộng của khe rãnh ở hai đầu con lăn. Vậy cường độ tải trọng đường là :

$$q = \frac{P}{l} = \frac{15900}{5} = 3180\text{N/cm}$$

Bán chiều rộng của diện tích tiếp xúc giữa vòng đệm trong và con lăn là :

$$b = 1,522 \sqrt{\frac{q}{E} \cdot \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} = 1,522 \sqrt{\frac{318}{2,12 \cdot 10^7} \cdot \frac{1,8 \cdot 7,7}{1,8 + 7,7}} = 0,0225\text{cm}$$

Chiều rộng của giải tiếp xúc là $2b = 0,45\text{mm}$. Trị số đó là rất bé so với bán kính của con lăn và vòng đệm. ($R_1 = 18\text{mm}$, $R_2 = 77\text{mm}$).

Áp suất lớn nhất trên diện tích tiếp xúc là :

$$p_o = 0,4180 \sqrt{q \cdot E \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}} = 0,4180 \sqrt{318 \cdot 2,12 \cdot 10^7 \cdot \frac{1,8 + 7,7}{1,8 \cdot 7,7}} = 89900 \text{ N/cm}^2$$

Thường đối với thép vòng bi, áp suất cho phép là $[p_o] = 250000 \text{ N/cm}^2$. Vậy ta thấy áp suất trên là còn rất bé so với áp suất cho phép.

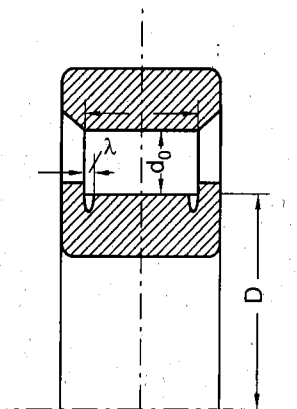
Ví dụ 5. Xác định áp suất lớn nhất giữa hai bánh răng thẳng khi chúng tiếp xúc nhau ở vị trí cực ăn khớp (h.25-7).

Khảo sát các trường hợp sau đây :

1. Bánh chủ động và bị động cùng làm bằng một loại vật liệu.
2. Bánh chủ động bằng thép và bánh bị động bằng gang.

Bài giải

Ở đây ta chỉ xét ở một thời điểm nhất định. Tại thời điểm đó xem tải trọng là tĩnh định. Ta cũng thừa nhận rằng, vật liệu là đồng nhất và đẳng hướng. Không kể đến độ khác biệt của lớp tôi ở bề mặt.



Hình 25-6

Một cách gần đúng ta sử dụng công thức (25-20) và (25-21) để tính áp suất lớn nhất trong vùng tiếp xúc, nghĩa là xem như sự tiếp xúc là dài vô hạn. Thừa nhận hệ số Poátxông của thép và của gang là như nhau ($\mu = 0,28$). Do đó hằng số đàn hồi η của vật liệu là :

$$\eta = 2(1 - \mu^2) \frac{E_1 + E_2}{E_1 E_2} = 1,84 \cdot \frac{1}{E_o}$$

E_o được gọi là môđun đàn hồi thu gọn

$$\left(E_o = \frac{2E_1 E_2}{E_1 + E_2} \right)$$

Với thép có $E_1 = 2.10^7 \text{ N/cm}^2$ và với gang có $E_2 = 1,5.10^7 \text{ N/cm}^2$. Vậy $E_o = 1,71.10^7 \text{ N/cm}^2$.

Khi các bánh cùng làm bằng một loại nguyên vật liệu thì có $E_o = E$.

Gọi ρ_1 và ρ_2 là bán kính cong của dạng răng tại cực ăn khớp. Khi đó tổng độ cong của các bánh là : $\sum k = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{1}{\rho_o}$

ρ_o được gọi là bán kính cong thu gọn. Ta có :

$$\rho_o = \sqrt{\frac{1}{1,84} \cdot \frac{q E_o}{\rho_o}} = 0,416 \sqrt{\frac{q \cdot E_o}{\rho_o}}$$

Từ hình vẽ 25-7, dễ dàng tìm được : $\rho_1 = \frac{d_1}{2} \sin \alpha$ và $\rho_2 = \frac{d_2}{2} \sin \alpha$.

Trong đó d_1 và d_2 là đường kính của các đường tròn ăn khớp của các bánh xe. α là góc ăn khớp (h.25-8).

Cường độ tải trọng phân bố là $q = \frac{P_n}{l} = \frac{P}{l \cos \alpha}$

trong đó :

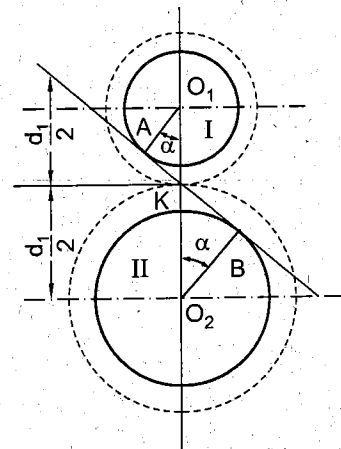
l – chiều dài của răng

P_n – lực theo phương pháp tuyến của mặt răng

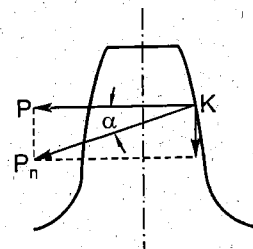
P – lực vòng

Vậy áp lực cực đại trên diện tích tiếp xúc là :

$$\rho_o = 0,832 \sqrt{\frac{E_o}{\sin 2\alpha} \left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} \right) \frac{P}{l}}$$



Hình 25-7

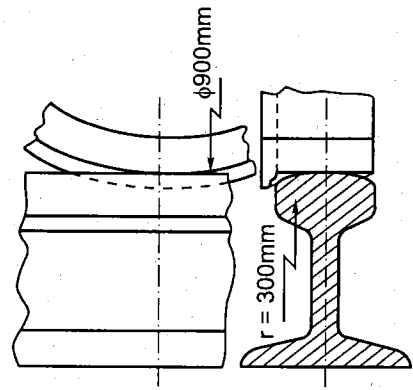


Hình 25-8

Ví dụ 6. Tính áp lực lớn nhất và kích thước của diện tích tiếp xúc giữa bánh xe và đường ray của toa xe chở hàng có bốn cụm bánh (h.25-9). Trọng tải của toa tàu $Q = 60t$. Bán kính của đầu đường ray $r = 300mm$. Đường kính của bánh xe $D = 900mm$.

Bài giải

Ở đây ta có thể xem như sự tiếp xúc của hai mặt trụ có trục vuông góc với nhau. Vậy diện tích tiếp xúc là một hình elip với các bán trục chính là a và b .



Hình 25-9

Tải trọng của bánh xe truyền xuống đường ray là :

$$P = \frac{Q}{4.2} = 75000N$$

Các độ cong chính của bánh xe là :

$$k_{11} = \frac{2}{D} = 0,0222 \frac{1}{cm}, k_{12} = 0$$

Các độ cong chính của đường ray là :

$$k_{21} = \frac{1}{r} = \frac{1}{30} = 0,0333 \frac{1}{cm}, k_{22} = 0$$

Các mặt cong chính k_{11} và k_{22} vuông góc với nhau, do đó ta có $\cos 2\omega = -1$. Vậy :

$$\Omega = \frac{k_{21} - k_{11}}{k_{21} + k_{11}} = \frac{D - 2r}{D + 2r} = \frac{1}{5} = 0,2$$

Tra theo bảng 25-1 tìm thấy :

$$n_a = 1,141 + \frac{0,2000 - 0,1894}{0,2207 - 0,1894} (1,168 - 1,141) = 1,150$$

$$n_b = 0,8837 - 0,3387(0,8837 - 0,8660) = 0,8777$$

$$n_p = 0,9919 - 0,3387(0,9919 - 0,9890) = 0,9909$$

Tổng các độ cong của các bề mặt tiếp xúc :

$$\Sigma k = \frac{2}{D} + \frac{1}{r} = 0,0555 \frac{1}{cm}$$

Lấy $E = 2.10^7 N/cm^2$ và $\mu = 0,30$ ta có :

$$\eta = 2 \frac{1 - \mu^2}{E} = 0,91.10^{-7} cm^2/N$$

Khi đó các kích thước của diện tích tiếp xúc sẽ là :

$$a = 1,150 \sqrt[3]{\frac{3}{2} \cdot \frac{0,91 \cdot 10^{-7}}{0,0555} \cdot 75000} = 1,150 \cdot 0,569 = 0,65 \text{ cm}$$

$$b = 0,8777 \sqrt[3]{\frac{3}{2} \cdot \frac{0,91 \cdot 10^{-7}}{0,0555} \cdot 75000} = 0,8777 \cdot 0,569 = 0,5 \text{ cm}$$

Áp suất lớn nhất trong vùng diện tích tiếp xúc là :

$$p_o = 0,9909 \frac{1}{\pi} \sqrt[3]{\frac{3}{2} \left(\frac{0,0555}{0,91 \cdot 10^{-7}} \right)^2 \cdot 75000}$$

$$p_o \approx 110000 \text{ N/cm}^2$$

Để kiểm tra lại ta có thể sử dụng công thức (25-11) để tính :

$$p_o = \frac{3}{2} \frac{75000}{\pi \cdot 0,65 \cdot 0,50} \approx 110.000 \text{ N/cm}^2$$

Hai cách tính cùng cho một kết quả.

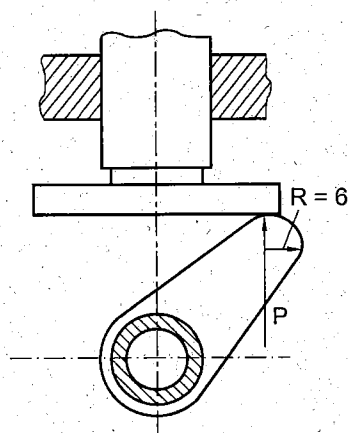
Bài tập

25.1. Xác định lực cho phép P của cơ cấu cam tác dụng vào mặt phẳng của cần đẩy. Bề dày của cam $l = 12 \text{ mm}$.

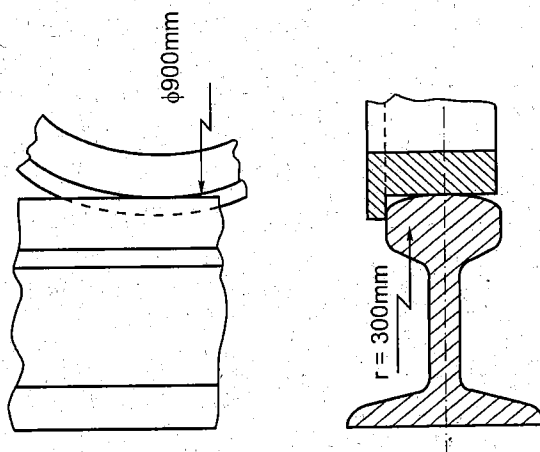
Cơ cấu cam và cần đẩy đều bằng thép có $E = 2 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$;

$$[\sigma]_{\text{tx}} = 1500 \text{ N/mm}^2$$

Với lực P cho phép, tính kích thước của diện tích tiếp xúc (h.25-10).



Hình 25-10



Hình 25-11

25.2. Xác định kích thước của diện tích tiếp xúc và áp suất lớn nhất giữa đường ray và bánh xe hỏa (h.25-11). Toa xe có 8 bánh và có trọng lượng $Q = 600\text{kN}$. Đường kính bánh xe $D = 900\text{mm}$ và bán kính nùm ray $r = 300\text{mm}$. Lấy $E = 2 \cdot 10^7 \text{ N/cm}^2$; $\mu = 0,30$.

25.3. Trên hình 25-12 biểu diễn một ổ bi đơn. Xác định :

1. Kích thước của diện tích tiếp xúc giữa viên bi với vòng bi.

2. Áp suất lớn nhất p_0 tác dụng lên các diện tích tiếp xúc.

Kích thước ổ bi : rộng 28mm, bán kính ngoài 75mm, bán kính trong 42,5mm.

Bán kính ngoài nhỏ nhất của vòng bi trong :

$$R_t = 48,83\text{mm}$$

Bán kính trong lớn nhất của vòng bi ngoài :

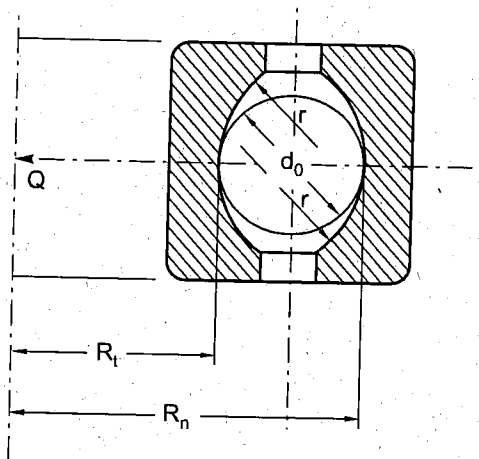
$$R_n = 68,67\text{mm}$$

Bán kính rãnh của vòng bi trong và ngoài :

$$r = 10,23\text{mm}$$

Đường kính viên bi :

$$d_0 = 19,84\text{mm}$$



Hình 25-12

Số viên bi $i = 10$

Lực tác dụng lên ổ bi $Q = 3400\text{N}$

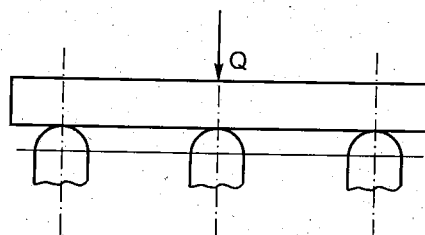
Môđun đàn hồi $E = 21,2 \cdot 10^6 \text{ N/cm}^2$

Hệ số Poatxông $\mu = 0,30$

Chú thích : Vì tải trọng Q không truyền đều xuống mỗi viên bi, nên viên bi ở vị trí bất lợi nhất sẽ chịu một lực là $P = 5 \cdot \frac{Q}{i}$.

25.4. Một tấm toàn bằng thép chịu lực $Q = 7,5\text{kN}$ ở tâm và được đặt trên ba cột thép có đầu mút nửa hình cầu bán kính $R = 15\text{mm}$. Ba cột này được bố trí theo hình tam giác đều, do đó lực Q phân bố đều lên các cột (h.25-13).

Tính kích thước diện tích tiếp xúc, áp suất lớn nhất giữa tấm và đầu cột và độ dịch gần.



Hình 25-13

Nếu tấm bằng gang thì các đại lượng này sẽ thay đổi như thế nào ? Cho biết :

– Đối với thép : $E_{th} = 2,1 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$; $\mu_{th} = 0,28$

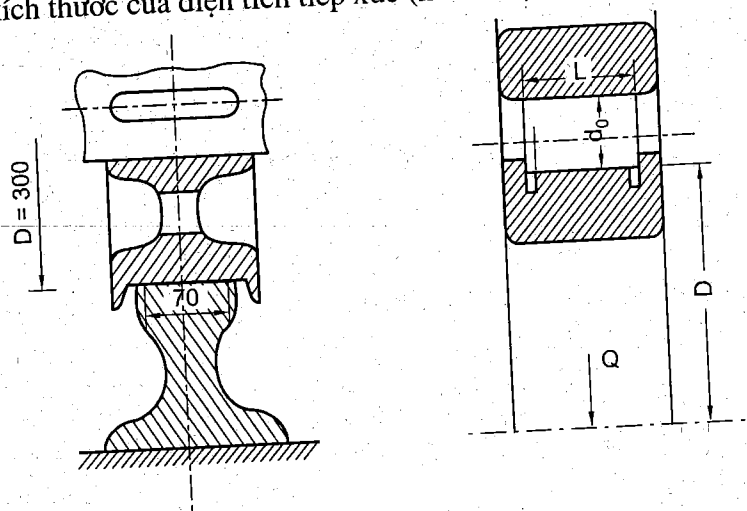
– Đối với gang : $E_g = 1,2 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$; $\mu_g = 0,25$

25.5. Xác định tải trọng cho phép tác dụng lên bánh xe của một cầu trục. Mũ ray là phẳng.
Bánh xe và ray đều bằng thép có :

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2 ;$$

$$[\sigma]_{tx} = 600 \text{ N/mm}^2 .$$

Sau đó tính kích thước của diện tích tiếp xúc (h.25–14)



Hình 25–14

PHỤ LỤC

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN HẠNG N

Phương trình vi phân hạng n là phương trình có dạng :

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \dots + P_n(x).y = R(x) \quad (1)$$

Nếu $R(x) = 0$ thì được gọi là phương trình thuần nhất.

Nếu $R(x) \neq 0$ thì được gọi là phương trình không thuần nhất.

Nếu như $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ là nghiệm của phương trình thuần nhất thì hàm :

$$y = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + \dots + C_n\varphi_n(x)$$

cũng là nghiệm của phương trình thuần nhất nếu như $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ không phụ thuộc tuyến tính. Điều đó có nghĩa là :

$$a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + \dots + a_n\varphi_n(x) = 0 \quad (2)$$

dù có một hệ số $a_1, a_2, \dots, a_n$ khác không.

Các hàm $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ là phụ thuộc tuyến tính khi tất cả các hệ số của (4) phải triệt tiêu.

Nghiệm tổng quát của (1) sẽ là tổng của nghiệm thuần nhất + nghiệm riêng nào đó của (1).

Phương trình tuyến tính với các hệ số là hằng số mà không có vế phải :

$$y^{(n)} + p_1y^{(n-1)} + \dots + p_n.y = 0 \quad (3)$$

Được giải dựa vào phương trình đặc tính :

$$r^n + p_1r^{n-1} + p_2r^{n-2} + \dots + p_n = 0 \quad (4)$$

1. Nếu nghiệm $r_1, r_2, \dots, r_n$ của phương trình (4) là thực và không có bội số chung, nghiệm của (3) sẽ là :

$$y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x} + \dots + C_ne^{r_nx} \quad (5)$$

2. Nếu như các nghiệm thực r có một bội số chung k ($r_1 = r_2 = \dots = r_k$) như vậy nghiệm (5) sẽ là :

$$(C_1 + C_2x + \dots + C_kx^{k-1})e^{rx} \quad (6)$$

3. Nếu phương trình đặc tính có một đôi bội số phức ($r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$) như vậy trong (5) phải thay thế :

$$e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x) \quad (7)$$

4. Nếu như đôi nghiệm liên hợp có một số bội số chung nào đó, (5) sẽ có dạng :

$$e^{\alpha x}[(C_1 + C_2x + \dots + C_kx^{k-1})\cos\beta x + (D_1 + D_2x + \dots + D_kx^{k-1})\sin\beta x] \quad (8)$$

PHƯƠNG TRÌNH BẬC BA

Giả sử ta có phương trình bậc ba với các hệ số thực :

$$y^3 + a_1y^2 + a_2y + a_3 = 0 \quad (1)$$

Ta đưa vào ẩn số mới x với giả thiết :

$$y = x + \alpha \quad (2)$$

Biểu thức (1) được viết lại dưới dạng :

$$x^3 + (3\alpha + a_1)x^2 + (3\alpha^2 + 2a_1\alpha + a_2)x + (\alpha^3 + a_1\alpha^2 + a_2\alpha + a_3) = 0$$

Để cho số hạng bình phương triệt tiêu chúng ta chọn :

$$\alpha = -\frac{a_1}{3}$$

Vậy biểu thức (2) sẽ là :

$$y = x - \frac{a_1}{3}$$

Do đó ta có thể đưa (1) về dạng :

$$f(x) = x^3 + px + q = 0 \quad (3)$$

Trong đó :

$$\left. \begin{aligned} p &= -\frac{a_1^2}{3} + a_2 \\ q &= \frac{2a_1^3}{27} - \frac{a_1a_2}{3} + a_3 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Vì p và q là thực nên phương trình (3) có thể có ba nghiệm thực hoặc một nghiệm thực và hai nghiệm liên hợp. Để xét xem phương trình (3) có thể rơi vào trường hợp nào ta hãy tính đạo hàm của hàm số $f(x)$.

$$f'(x) = 3x^2 + p$$

Nếu $p > 0$ như vậy $f'(x)$ luôn luôn dương, hàm số $f(x)$ luôn luôn tăng nghĩa là phương trình chỉ có một nghiệm thực.

Nếu $p < 0$ đạo hàm $f'(x)$ sẽ triệt tiêu tại hai điểm :

$$x = -\sqrt{-\frac{p}{3}} \text{ và } x = \sqrt{-\frac{p}{3}}$$

Tại $x = -\sqrt{-\frac{p}{3}}$ hàm số có giá trị cực đại và tại $x = \sqrt{-\frac{p}{3}}$ là cực tiểu. Các trị số cực đại và cực tiểu đó là :

$$q \mp \frac{2p}{3} \sqrt{-\frac{p}{3}}$$

Nếu cả hai trị số cực đại và cực tiểu đó là cùng dấu (hình 1).

Ta phải có :

$$\left(q - \frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)\left(q + \frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}\right) = q^2 + \frac{4p^3}{27} > 0 \quad (5)$$

hay :

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0 \quad (6)$$

Khi đó phương trình chỉ có một nghiệm thực. Nghiệm thực đó hoặc ở trong khoảng biến thiên $\left(-\infty, -\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)$ hoặc trong khoảng biến thiên $\left(+\sqrt{-\frac{p}{3}}, +\infty\right)$.

Nếu giá trị cực đại của $f(x)$ có giá trị dương và cực tiểu có giá trị âm (hình 2). Khi đó :

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0 \quad (7)$$

Phương trình sẽ có ba nghiệm thực.

Trường hợp :

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0 \quad (8)$$

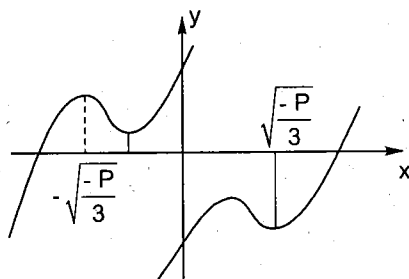
Ta luôn luôn xét với $p < 0$ vì $p > 0$ thì rơi vào trường hợp đầu.

Khi đó hoặc cực tiểu phải bằng không hoặc cực đại phải bằng không. Ví dụ với cực tiểu bằng không (hình 3), như vậy ta sẽ có một nghiệm kép là :

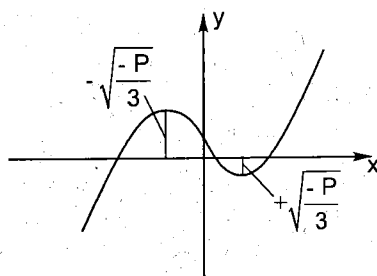
$$x = \sqrt{-\frac{p}{3}} \text{ và } q = -\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}$$

Ta dễ dàng tìm thấy nghiệm thứ ba. Thực vậy, giả thiết gọi nghiệm thứ 3 là β . Như vậy phương trình (3) có thể viết lại dưới dạng :

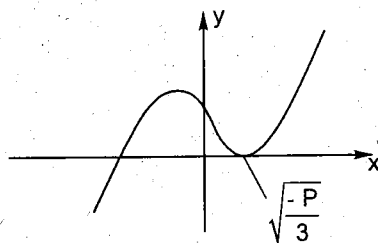
$$x^3 + px + q = \left(x - \sqrt{-\frac{p}{3}}\right)^2 (x - \beta) = 0$$



Hình 1



Hình 2



Hình 3

Số hạng tự do của vế trái sẽ là $-\beta\left(\frac{-p}{3}\right)$ số hạng đó phải bằng $+q$, do đó ta có :

$$\beta \cdot \frac{p}{3} = q$$

Vậy
$$\beta = \frac{3q}{p} \quad (9)$$

Cách giải theo lượng giác xin xem Курс вы шей математики tập I của В. И. Смирнов.

CÁC TÍCH PHÂN ELIP TÍCH TOÀN PHẦN

Trong bài toán ứng suất tiếp xúc chúng ta phải giải quyết các tích phân sau đây :

$$K(e) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}$$

$$L(e) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi} d\varphi$$

$$D(e) = \frac{1}{e^2} [K(e) - L(e)]$$

Các tích phân đó được gọi là tích phân elip tích toàn phần. Cách giải được thực hiện bằng số và trị số của $K(e)$ và $L(e)$ được tra bảng theo góc $\theta = \arcsine$.

Độ lún của bán không gian vô hạn chịu tải trọng thẳng đứng P là :

$$w = \frac{1 - \mu^2}{E} \cdot \frac{P_0}{a} \left[a \cdot b \cdot K - \frac{a}{b} D x_1^2 - \frac{a}{b} (K - D) y_1^2 \right]$$

BẢNG TÍCH PHÂN

1. $\int_0^l \frac{dx}{\beta + \lambda x}$ β và λ là các hằng số. Đặt $u = \beta + \lambda x$ vậy

$$= \frac{1}{\lambda} \int_{\beta}^{\beta + \lambda l} \frac{du}{u} = \frac{1}{\lambda} \ln u \Big|_{\beta}^{\beta + \lambda l} = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{\beta + \lambda l}{\beta}$$

2. $\int_0^l \frac{x dx}{\beta + \lambda x}$ Đặt $u = \beta + \lambda x$, $x = \frac{1}{\lambda} (u - \beta)$

$$= \frac{1}{\lambda^2} \int_{\beta}^{\beta + \lambda l} \frac{(u - \beta) du}{u} = \frac{1}{\lambda^2} \left[\int_{\beta}^{\beta + \lambda l} du - \beta \int_{\beta}^{\beta + \lambda l} \frac{du}{u} \right] = \frac{1}{\lambda^2} [u - \beta \cdot \ln u] \Big|_{\beta}^{\beta + \lambda l}$$

$$\begin{aligned}
 3. \int_0^l \frac{x^2 dx}{\beta + \lambda x} & \quad u = \beta + \lambda x \quad x = \frac{1}{\lambda}(u - \beta) \\
 & = \frac{1}{\lambda^3} \int \frac{(u - \beta)^2 du}{u} = \frac{1}{\lambda^3} \left[\int_{\beta}^{\beta+\lambda l} u du - \int_{\beta}^{\beta+\lambda l} 2\beta du + \beta \int_{\beta}^{\beta+\lambda l} \frac{du}{u} \right] \\
 & = \frac{1}{\lambda^3} \left[\frac{u^2}{2} - 2\beta u + \beta^2 \ln u \right]_{\beta}^{\beta+\lambda l}
 \end{aligned}$$

$$4. \int \ln u du = u \ln u - u + C$$

$$\begin{aligned}
 5. \int_0^l \frac{dx}{\beta^* - \lambda x} & \quad u = \beta^* - \lambda x \quad du = -\lambda dx \\
 & = -\frac{1}{\lambda} \int_{\beta^*}^{\beta^* - \lambda l} \frac{du}{u} = -\frac{1}{\lambda} \ln u \Big|_{\beta^*}^{\beta^* - \lambda l} = -\frac{1}{\lambda} \ln \frac{\beta^* - \lambda l}{\beta^*}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6. \int_0^l \frac{x dx}{\beta^* - \lambda x} & \quad u = \beta^* - \lambda x \quad du = -\lambda dx \\
 & \quad x = (\beta^* - u) \frac{1}{\lambda} \\
 & = -\frac{1}{\lambda^2} \int_{\beta^*}^{\beta^* - \lambda l} \frac{(\beta^* - u) du}{u} = -\frac{1}{\lambda^2} \left[\beta^* \int_{\beta^*}^{\beta^* - \lambda l} \frac{du}{u} - \int_{\beta^*}^{\beta^* - \lambda l} du \right] \\
 & = -\frac{1}{\lambda^2} [\beta^* \ln u - u]_{\beta^*}^{\beta^* - \lambda l} - \frac{1}{\lambda^2} \left[\beta^* \ln \frac{\beta^* - \lambda l}{\beta^*} + \lambda l \right] \\
 7. \int_0^l \frac{x^2 dx}{\beta^* - \lambda x} & = -\frac{1}{\lambda^3} \int_{\beta^*}^{\beta^* - \lambda l} \frac{(\beta^* - u)^2 du}{u} = -\frac{1}{\lambda^3} \left[\beta^{*2} \int_{\beta^*}^{\beta^* - \lambda l} \frac{du}{u} - 2\beta^* \int_{\beta^*}^{\beta^* - \lambda l} du + \int_{\beta^*}^{\beta^* - \lambda l} u du \right] \\
 & = -\frac{1}{\lambda^3} \left[\beta^{*2} \ln u - 2\beta^* u + \frac{1}{2} u^2 \right]_{\beta^*}^{\beta^* - \lambda l}
 \end{aligned}$$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Nguyễn Y Tô và tập thể các tác giả. *Giáo trình Sức bền vật liệu, tập I và II*. Nhà xuất bản Đại học và Trung học chuyên nghiệp. Hà Nội, 1969.
2. Bùi Trọng Lưu và tập thể các tác giả. *Giáo trình Sức bền vật liệu*. Nhà xuất bản Đại học và Trung học chuyên nghiệp. Hà Nội, 1973.
3. М. М. филоненко – Бородич. *Курс сопротивления материалов, том I, II*. Государственное издательство технико – теоретической литературы – Москва, 1956.
4. В. И. Феодосьев. *Сопротивление материалов*. Издательство "Наука". Москва, 1970.
5. С. Д. Пономарев. *Расчёты на прочность в машиностроении*, Москва, 1965.
6. B. Jaoul. *Etude de la plasticité et application aux metaux*. Dunod. Paris, 1965.
7. Witold Nowacki. *Teoria sprężystości*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe. Warszawa, 1970.
8. С. П. Демидов. *Теория упругости*. Москва, "Высшая школа", 1979.
9. А. В. Даркова. *Строительная механика*. Москва, "Высшая школа", 1976.
10. В. А. Киселев. *Строительная механика*. Государственное издательство литературы по строительству, архитектуре и строительным материалам. Москва, 1960.
11. P. Stepin. *Strength of materials*. Foreign Languages Publishing House. Moscou.
12. F.V. Warnock. *Strength of materials*. London Sir Isaac Pitman and Sons Ltd.
13. L. I. Xêđôp. *Cơ học môi trường liên tục, tập II*. Nhà xuất bản Đại học và Trung học chuyên nghiệp. Hà Nội, 1978.
14. N. J. Bêđukhốp. *Cơ sở lí thuyết đàn hồi, lí thuyết dẻo, lí thuyết từ biến*. Nhà xuất bản Đại học và Trung học chuyên nghiệp. Hà Nội, 1978.
15. Jiri Sejnoha. *Pružnos, pevnost, plasticita*. Vydavatelství cvut. Praha 1.
16. С. П. Тимошенко. *Сопротивления материялов, том 1, 2*. ОГИЗ, 1946.
17. Н. М. Беляев. *Сопротивления материялов*. Москва, 1965.
18. И. М. Воронков. *Курс теоретической механики*. Государственное издательство технико – теоретической литературы. Москва, 1957.

19. Г. А. Смирнов – Алчев. *Сопротивление материалов пластическому деформированию*. Издательство "Машиностроение", 1978.
20. А. Илюшин. *Механика сплошной среды*. Издательство московского университета, 1978.
21. Janusz Walczak. *Wytry malos'c' materialow oraz podstawy teorii sprzytos' ci i platycznos' ci*.
22. М. М. Филоненко Бородич – *Курс сопротивления материалов*. 1956
23. Trần Văn Thông. *Luận án phó tiến sĩ (1986) ghép nhiều ống*.
24. Buhot G. Thuillier P. *Cours de mécanique. T. 2. Résistance des matériaux*. Masson. Paris, 1986.
25. Đặng Việt Cường, Nguyễn Nhật Thăng, Nhữ Phương Mai. *Sức bền vật liệu* 4/2003
26. Nguyễn Lương Dũng. *Phương pháp phần tử hữu hạn* 12/1993.

MỤC LỤC

Trang

Chương 14

DÂY MỀM

§14-1. Khái niệm	3
§14-2. Những công thức tổng quát	4
§14-3. Bài toán có móc đồng mức (dây thoải)	5
§14-4. Dây có móc không cùng độ cao	15
Bài tập	26

Chương 15

TÍNH CHUYỂN VỊ THEO PHƯƠNG PHÁP NĂNG LƯỢNG

§15-1. Công đàn hồi và công khả dĩ	28
§15-2. Sử dụng công đàn hồi để xác định chuyển vị	29
§15-3. Nguyên lí chuyển vị khả dĩ	33
§15-4. Công thức Mo để xác định chuyển vị	34
§15-5. Một số định lí quan trọng	37
§15-6. Phương pháp nhân biểu đồ của Verèsaghin	40
§15-7. Tính chuyển vị gây nên do nhiệt độ	45
§15-8. Tính chuyển vị gây nên do liên kết chuyển dịch	46
Bài tập	47

Chương 16

GIẢI BÀI TOÁN SIÊU TĨNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP LỰC

§16-1. Một số khái niệm cơ bản	49
§16-2. Tính hệ thanh siêu tĩnh bằng phương pháp lực	50
§16-3. Sử dụng tính chất đối xứng của hệ	56
§16-4. Dầm liên tục	60
§16-5. Các bài toán siêu tĩnh trong trường hợp chịu lực đơn giản của thanh	64
Bài tập	68

Chương 17

MA TRẬN CHUYỂN

§17-1. Định nghĩa về ma trận chuyển.....	71
§17-2. Đoạn thanh chịu lực phân bố đều	72
§17-3. Dầm có bước nhảy	74
§17-4. Xét đoạn dầm chịu lực tập trung.....	75
§17-5. Dầm có mômen quán tính thay đổi	80
§17-6. Dầm liên tục	91
Bài tập	96

Chương 18

PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN

§18-1. Những định nghĩa ban đầu.....	97
§18-2. Hàm chuyển vị.....	99
§18-3. Xác định các thành phần của ma trận cứng	101
§18-4. Ghép các phần tử	102
§18-5. Lực tương đương.....	103
§18-6. Thanh chịu uốn và kéo nén đúng tâm	105
§18-7. Bài toán xoay trục.....	108
§18-8. Tính ma trận cứng khi quay trục	110
Bài tập	122

Chương 19

TẢI TRỌNG ĐỘNG

§19-1. Khái niệm	123
§19-2. Bậc tự do	123
§19-3. Phương trình vi phân dao động	124
§19-4. Dao động tự do	125
§19-5. Dao động cưỡng bức với $P(t) = P_0 \sin \Omega t$	126
§19-6. Phương pháp thu gọn khối lượng.....	130
§19-7. Dao động của hệ nhiều bậc tự do.....	132
§19-8. Ma trận cứng.....	138
§19-9. Dao động cưỡng bức.....	141
§19-10. Tần số dao động riêng của thanh đồng nhất	146
§19-11. Phương pháp gần đúng để xác định tần số dao động riêng.....	149
§19-12. Va chạm thẳng đứng của hệ có một bậc tự do.....	157

§19-13. Va chạm ngang của hệ có một bậc tự do	161
§19-14. Tính ứng suất trong các kết cấu có chuyển động với gia tốc không đổi.....	162
§19-15. Tốc độ tới hạn của trục quay	163
Bài tập	164

Chương 20

TÍNH ĐỘ BỀN KHI ỨNG SUẤT BIẾN ĐỔI CÓ CHU KÌ

§20-1. Khái niệm về hiện tượng mỏi	169
§20-2. Phân loại và các đặc trưng của chu trình ứng suất.....	170
§20-3. Giới hạn mỏi và biểu đồ giới hạn mỏi	172
§20-4. Các nhân tố ảnh hưởng đến giới hạn mỏi	176
§20-5. Hệ số an toàn về mỏi	181
§20-6. Những biện pháp nâng cao giới hạn mỏi	188
Bài tập	189

Chương 21

ỔN ĐỊNH

§21-1. Khái niệm	191
§21-2. Bài toán ôlê.....	191
§21-3. Ứng suất tới hạn và giới hạn áp dụng công thức Ôlê	195
§21-4. Phương pháp thực hành để tính thanh chịu nén	196
§21-5. Hình dạng mặt cắt hợp lý khi chịu nén.....	201
§21-6. Ổn định của dầm chịu uốn ngang phẳng	201
§21-7. Ổn định của vành chịu áp suất bên ngoài	203
Bài tập	205

Chương 22

THANH THÀNH MỎNG

§22-1. Khái niệm	207
§22-2. Đặc trưng quạt của mặt cắt ngang của thanh thành mỏng hở.....	208
§22-3. Ứng suất tiếp trong thanh thành mỏng khi chịu uốn ngang	215
§22-4. Xoắn thanh thành mỏng.....	219
§22-5. Độ vênh của mặt cắt ngang khi chịu xoắn.....	224
§22-6. Xoắn kiểm chế thanh thành mỏng có mặt cắt hở.....	226
§22-7. Trường hợp chịu lực tổng quát của thanh thành mỏng hở	231
Bài tập	235

Chương 23

ỐNG DÀY

§23-1. Khái niệm	238
§23-2. Công thức ứng suất và chuyển vị	239
§23-3. Các trường hợp riêng quan trọng	241
§23-4. Ống ghép	245
§23-5. Đĩa có độ dày đều quay với vận tốc cao	254

Chương 24

VỎ

§24-1. Khái niệm	257
§24-2. Vỏ mỏng tròn xoay	257
Bài tập	268

Chương 25

ỨNG SUẤT TIẾP XÚC

§25-1. Hình dáng của mặt tiếp xúc	269
§25-2. Độ dịch gần của hai vật thể	270
§25-3. Cường độ áp suất lớn nhất	271
§25-4. Cách tính độ bền	272
§25-5. Một số bài toán tiếp xúc thường gặp	275
Bài tập	286

PHỤ LỤC	289
TÀI LIỆU THAM KHẢO	294
MỤC LỤC	296

Chịu trách nhiệm xuất bản :

Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI

Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NGUYỄN QUÝ THAO

Tổ chức bản thảo và chịu trách nhiệm nội dung :

Chủ tịch HĐQT kiêm Giám đốc Công ty CP sách ĐH-DN TRẦN NHẬT TÂN

Biên tập và sửa bản in :

BÙI MINH HIỂN

Trình bày bìa :

BÙI QUANG TUẤN

Chế bản :

MINH CHÂU

SỨC BỀN VẬT LIỆU – TẬP HAI

Mã số: 7K640y9 – DAI

In 1.000 bản (QĐ : 57), khổ 19 x 27 cm. In tại Công ty CP In – Thương mại Hà Tây.

Địa chỉ : Số 15, đường Quang Trung, Quận Hà Đông, Hà Nội.

Số ĐKKH xuất bản : 04 – 2009/CXB/191 – 2117/GD.

In xong và nộp lưu chiểu tháng 9 năm 2009.





CÔNG TY CỔ PHẦN SÁCH ĐẠI HỌC - DẠY NGHỀ
HEVOBCO
25 HÀN THUYỀN - HÀ NỘI
Website : www.hevobco.com.vn

TÌM ĐỌC SÁCH THAM KHẢO KỸ THUẬT CỦA NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

- | | |
|---|---|
| 1. Giáo trình xây dựng mặt đường ô tô - Tập 1 | Dương Học Hải |
| 2. Giáo trình xây dựng mặt đường ô tô - Tập 2 | Trần Đình Bửu – Dương Học Hải |
| 3. Nền và móng | Phan Hồng Quân |
| 4. Bài tập vẽ kỹ thuật xây dựng – Tập 1 | Đặng Văn Cứ – Nguyễn Quang Cự
Đoàn Như Kim |
| 5. Bài tập vẽ kỹ thuật xây dựng – Tập 2 | Đặng Văn Cứ – Nguyễn Quang Cự
Đoàn Như Kim |
| 6. Bài tập cơ học đất | Vũ Công Ngữ |
| 7. Vật liệu xây dựng | Phùng Văn Lự |
| 8. Giao tiếp đồ họa kỹ thuật xây dựng | Đặng Văn Cứ (Chủ biên) |

Bạn đọc có thể mua tại các Công ti Sách - Thiết bị trường học ở các địa phương hoặc các Cửa hàng sách của Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam :

Tại Hà Nội : 25 Hàn Thuyên ; 187B Giảng Võ ; 232 Tây Sơn ; 23 Tràng Tiền ;

Tại Đà Nẵng : Số 15 Nguyễn Chí Thanh ; Số 62 Nguyễn Chí Thanh ;

Tại Thành phố Hồ Chí Minh : Cửa hàng 451B - 453, Hai Bà Trưng, Quận 3 ;

240 Trần Bình Trọng – Quận 5.

Tại Thành phố Cần Thơ : Số 5/5, đường 30/4 ;

Website : www.nxbgd



8 934980 935637



Giá: 42.000 đ